中 山 大 学

二〇一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 874

科目名称： 高等代数

考试时间： 1 月 5 日 下 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

1. (20分) 设n阶实方阵A的主对角元为0， 其他元为1。

1）求A 的行列式$\det A$ 及A 的逆A^{-1}；

2）求A 的特征值、特征向量及最小多项式。

2. (20分) 设数域F上多项式$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$, $g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$。

1）求f与g的首一最大公因式$d=(f,g)$；

2）令$U=\{uf+vg : u,v\in F[x]\}$，求商空间$F[x]/U$的维数。

3. (20分) 设$A, A_1, \cdots, A_k$都是数域F上的n阶方阵，且$A_1+\cdots+A_k=I_n$。证明：

1） 若$A^2=A$，则A 的迹等于A 的秩，即 $tr\, A=rank\, A$；

2） $A^2=A$ 当且仅当 $rank\, A+rank\,(I_n-A)=n$；

3） ${A_i}^2=A_i, i=1,\cdots,k$ 当且仅当 $rank\, A_1+\cdots+rank\, A_k=n$。

4. (10分) 设A, B, C是数域F上的2阶方阵，记$[A,B]=AB-BA$。证明：$[[A,B]^2, C]=0$。

5. (10分) 设V是数域F上的n维线性空间，σ和τ都是V上的线性变换， V是σ循环子空间，且$\sigma\tau=\tau\sigma$。 证明：存在某个多项式$f(x)$使得$\tau=f(\sigma)$。

6. (10分) 求复矩阵 $A=\begin{pmatrix} 13 & 16 & 14 \\ -6 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$ 的若当标准形。

7. (10分) 设 $q(X)=X^T AX$ 为 n 元实二次型，令 $V=\{ X\in R^n : q(X)=0 \}$。证明：二次型 $q(X)$ 是半正定或者半负定的充要条件为 V 是 R^n 的子空间，这里 R 是实数域。

8. (10分) 设 V 为数域 F 上一个 n 维线性空间，f 是 V 上的一个双线性函数，令 $V_1=\{ x\in V : f(x,y)=0 \,, \forall\, y\in V \}$，$V_2=\{ y\in V : f(x,y)=0 \,, \forall\, x\in V \}$。
证明：V_1 和 V_2 都是 V 的子空间，且维数相等，即 $\dim V_1=\dim V_2$。

9. (20分) 给定4维标准欧氏空间 R^4 的一个基 (e_1, e_2, e_3, e_4)，以此基作为列向量组的矩阵记为 A，其中 $e_1=(1,1,0,0)$，$e_2=(1,0,1,0)$，$e_3=(-1,0,0,1)$，$e_4=(1,-1,-1,1)$。

1）用正交化方法求 R^4 的一个标准正交基 (e_1', e_2', e_3', e_4')；

2）求正交矩阵 Q 及主对角元大于零的上三角矩阵 T 使得 $A=QT$。

10. (20分) 设实矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$A^T$ 表示 A 的转置。

1）求正定矩阵 B 使得 $AA^T=B^2$；

2）求正定矩阵 C 及正交矩阵 D 使得 $A=CD$；

3）求正交矩阵 P 及正交矩阵 Q 使得 PAQ 为对角矩阵。