中国科学院研究生院
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1．(15 分)　证明 多项式 $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 没有重根。

2．(20 分)　设多项式 $g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geq 1)$，多项式 $p(x)$ 与 $g_1(x)$ 互素。证明：对任意多项式 $f(x)$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^k(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$$

其中，$r(x), f_1(x)$ 都是多项式，$r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(p(x))$。

3．(20 分)　已知 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

其中，$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2=n$。

1) 求 A 的全部特征值；

2) 求 A 的行列式 $\det(A)$ 和迹 $\mathrm{tr}(A)$。

4．(15 分) 设数域 k 上的 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，V_1, V_2 分别是齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $(A-I_n)x=0$ 在 k^n 中的解空间，试证明：$\mathrm{k}^n=V_1\oplus V_2$，其中 I_n 代表 n 阶单位矩阵，$\oplus$ 表示直和。

5．(20 分) 设n阶矩阵A可逆，α,β均为n维列向量，且$1+\beta^T A^{-1}\alpha \neq 0$，其中$\beta^T$表示$\beta$的转置。

1）证明矩阵$P=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$可逆，并求其逆矩阵；

2）证明矩阵$Q=A+\alpha\beta^T$可逆，并求其逆矩阵。

6．(20 分) 证明：任何复数方阵A都与它的转置矩阵A^T相似。

7．(22 分) 在二阶实数矩阵构成的线性空间$\mathrm{R}^{2\times2}$中定义：

$$(A,B)=\mathrm{tr}(A^T B)，\quad \forall A,B\in \mathrm{R}^{2\times2}$$

其中，A^T表示矩阵A的转置，$\mathrm{tr}(X)$表示矩阵X的迹。

1) 证明(A,B)是线性空间$\mathrm{R}^{2\times2}$的内积；

2) 设W是由$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$生成的子空间。试求$W^{\perp}$的一组标准正交基。

8．(18 分) 设$T_1,T_2,\cdots,T_n$是数域上线性空间V的非零线性变换，试证明存在向量$\alpha\in V$，使得$T_i(\alpha)\neq 0, i=1,2,\cdots,n$。