2007 年太原科技大学硕士研究生入学考试

高等代数（412）试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一、选择题（本题满分 18 分，每小题 6 分）

1. 设 A、B 都是 n 阶非零矩阵，且 AB=0，则 A 和 B 的秩（　　）

A.必有一个等于 0　　　　B.都小于 n

C. 一个小于 n, 一个等于 n　　　　D. 都等于 n

2. 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $R(A)=m<n, E_m$ 为 m 阶单位矩阵,下述结论正确的是(　　)

A． A 的任意 m 个列向量必线性无关.

B． A 的任意 m 个子式不等于 0 .

C． A 通过初等行变换必可化为 $(E_m,0)$ 的形状.

D．非齐次线性方程组 $Ax=b$ 一定有无穷多组解

3．二次型 $f(x_1,x_2,x_2)=x_1^{\ 2}+x_3^{\ 2}+x_1x_2+x_2x_3$ 是（　）二次型

A 正定　　B．不定　　C．负定　　D．半正定

二、填空题（本题满分 18 分，每小题 6 分）

1. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2,|B|=-3$，则 $\left|2A^*B^{-1}\right|=$（　　　　　）

2. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}=$（　　　　　）

3. 若 $V=\{(a+bi,c+di)\mid a,b,c,d\in R,$且均不为零,其中$i$为虚数单位$\}$， 则 V 对于通常的加法和数乘，在复数域 C 上是（　　）维线性空间，而在实数域 R 上是（　　）维线性空间。

三、（本题满分 12 分）设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 求 $(A+2E)(A^2-4E)^{-1}$

四、（本题满分 12 分）在复数域上求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 的 $Jordan$ 标准型。

五、（本题满分 15 分，每小题 5 分）设 η 是欧氏空间 V 中一单位向量，定义：

$$A\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta\text{，}\ \eta\in V$$

求证：（1） A 是线性变换；

（2） A 是正交变换；

（3） A 是对称变换.

六、（本题满分 15 分，第（1）小题 8 分，第（2）小题 7 分）设 $A=\begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

（1）求 A 的特征值与特征向量；

（2）求 A^{100}

七、（本题满分 15 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 试就 a,b 的各种取值情况，讨论非齐次方程组 $AX=B$ 的解，如有解，并求出解。

八、（本题满分 15 分）令 $M_n(F)$ 是数域 F 上全体 n 阶方阵所组成的向量空间。令

$$S=\{A \mid A'=A, A\in M_n(F)\} \qquad T=\{A \mid A'=-A, A\in M_n(F)\}$$

试证： $M_n(F)=S\oplus T$ 。（$\oplus$ 为直和）

九、（本题满分 15 分，每小题 5 分）设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 4 维线性空间V 的一组基，已知线性变换T 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

（1）求T 在基$\eta_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\eta_2=3\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\eta_3=\varepsilon_3+\varepsilon_4,\eta_4=2\varepsilon_4$ 下的矩阵。

（2）求T 的核与值域。

（3）在T 的核中选一组基，把它扩充成V 的一组基，并求T 在这组基下的矩阵。

十、（本题满分 15 分）若A 是满秩矩阵，求证：存在正交矩阵P_1,P_2，使

$$P_1^{-1}AP_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_n\end{pmatrix}，\lambda_i>0(i=1,2,\ldots,n)。$$