

- ▶ 科研成果
- ▶ 研究专题
- ▶ 获奖

## 四阶椭圆问题降阶计算方法研究取得进展

【大中小】 【打印】 【关闭】

2018-01-15 | 编辑: 文/材料环境部

四阶(椭圆)问题指可以诱导出二阶Sobolev空间上的椭圆变分问题的微分方程模型, 具有比较广泛的应用背景, 弹性力学、电磁学、磁流体力学、声学等应用学科中的许多模型都属于四阶问题的范畴。例如常见的双调和方程及近年来逐渐兴起的论题四阶旋度算子( $\text{curl}^4$ )等。这些算子(方程)来源多样, 是很多源问题和特征值问题的定性部分。四阶问题及其数值方法的研究构成了应用科学和数值分析的重要组成部分, 很多重要的计算数学专家都在这方面做出了引人注目的贡献, 不胜枚举。近年来, 随着新问题和新思维的不断涌现, 本领域也迎来了不断发展。

协调和非协调有限元是求解元形式(primal formulation)四阶问题的重要工具。这些单元直接离散二阶微分算子和近似二阶Sobolev空间, 在很多应用中发挥了不可替代的作用。另一方面, 由于这些单元通常需要用较高次多项式且其跨单元刚性限制较强, 离散问题常具有比较复杂的结构, 难于应用和求解。这促使我们, 在某些元形式的离散格式不是特别必要时, 构造包括降阶格式在内的替代方法。一般来说, 降阶方法通过引入辅助变量, 在低正则性空间上构造定解问题并离散, 有望带来计算的便利。这种便利体现在易于用常见的有限元软件包实现算法, 也体现在易于构造嵌套离散格式等方面。在文献中, 四阶问题降阶离散(主要是双调和方程混合元格式)方面已经有一些工作, 这些离散格式构成了有限元方法的一部分经典内容, 但是这些降阶形式与元形式的等价性往往需要依赖于额外的正则性假设, 所以在一些情况下受到限制; 这方面的情况可参见文[LZ17]中的文献回顾部分; 对于其它四阶问题来说, 稳定和等价的降阶形式更是少之又少。总体来看, 四阶问题降阶计算方法的设计、实现和应用是具有一定发展潜力的研究领域。

最近, 材料环境部张硕在四阶问题降阶计算方法的设计、实现和应用方面取得进展。在文[Z\_NM\_18]中, 张硕提出了一种一般性地将元形式的四阶椭圆问题转化为稳定的等价的降阶形式并离散的方法框架。该文指出一类二阶Sobolev空间可以描述为本身及导数各在某个一阶Sobolev空间(不必相同)中的函数的集合, 并基于这一认识为一类四阶问题构造了具有一定共性的离散格式。具体地, 该文设计了一种程式性方法, 将二阶Sobolev空间上的椭圆变分方程等价变换成三个一阶Sobolev空间上的变分方程组, 实现降阶处理; 进而, 提出一种程式性方法, 构造降阶问题的稳定离散格式, 从而得到了元问题的降阶离散格式, 并给出一般形式的误差估计。利用快速辅助空间预处理技巧, 可以对所得到的离散格式设计最优的预处理子, 其计算代价仅为求解两个二阶椭圆方程。本理论框架的实用性通过若干针对具体四阶问题的应用实例而得验证。

在上述一般性框架的设计和应用之外, 张硕还对某些模型问题设计了特殊的降阶格式, 例如, 为四阶旋度方程设计了稳定的混合元离散格式。四阶旋度方程是新近发展起来的一种典型四阶问题, 吸引了不少研究兴趣。方程正则性专家 Serge Nicaise研究了其正则性(Singularities of the quad curl problem, HAL preprint, 2016), 指出该问题的解一般具有奇性, 即给出了正则性的一个上界结果; 包括 Susanne Brenner、Peter Monk、许进超等著名专家在内的一些计算方法学者在近年来围绕其离散方法设计做了许多工作。在文[Z\_M2AN\_18]中, 基于三维 de Rham复形, 张硕提出了四阶旋度方程的降阶形式, 降低了问题的求解的复杂度和应用的难度。张硕证明了该降阶形式的适定性及与元形式的等价性, 并基于此导出了四阶旋度问题的解的正则性结果, 采用和Nicaise不同的研究方法给出了模型问题的正则性的一个下界结果。

在降阶格式的应用方面, 张硕和材料环境部季霞等人合作, 发展了求解双调和方程特征值问题的基于降阶格式的最优多重网格算法。在非张量积网格上, 双调和问题的元形式离散一般是非嵌套的, 多重网格类算法常难于设计和运行, ——文献中尚未见这方面的结果。在文[ZXJ\_17]中, 张硕和合作者先将双调和特征值问题写成等价的降阶形式, 生成相应的嵌套离散格式, 继而基于许进超-周爱辉(2001)和林群-谢和虎(2015)等提出的基本算法, 提出了一套计算双调和特征值问题的多重网格算法; 这套算法具有最优的收敛速率和最优的计算代价。值得指出的是, 用某些其它混合元格式计算双调和特征值问题可

能会得到赝解 (spurious mode), 这主要是因为当额外的正则性条件不得满足时, 四阶问题的元形式和混合形式可能是不等价的。本文设计使用的降阶格式和元形式格式是等价的, 从而避免了赝解的产生。除了理论分析之外, 数值例子也验证了这一点。类似的思想用于 Helmholtz 透射特征值的计算也取得包括最优收敛速率和最优计算代价的类似效果。

围绕四阶问题降阶计算方法, 张硕还完成若干相关工作, 部分已发表 (接收), 如 [FZ\_16], [LZ\_17]; 同时一些相关工作也在陆续展开。

参考文献:

[Z\_NM\_18] 张硕, "Regular decomposition and a framework of order reduced methods for fourth order problems", *NumerischeMathematik*, 138(2018), 241-271.

[Z\_M2AN\_18] 张硕, "Mixed schemes for quad-curl equations", *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 已接收.

[ZXJ\_17] 张硕, Y. Xi, X. Ji, "A multi-level mixed element method for the eigenvalue problem of biharmonic equation", *Journal of Scientific Computing*, 已接收.

[FZ\_16] C. Feng and 张硕\*. "Optimal solver for Morley element discretization of biharmonic equation on shape-regular grids", *J. Comp. Math.*, 34(2):159-173, 2016.

[LZ\_17] Z. Li and 张硕\*. "A stable mixed element method for the biharmonic equation with first-order function spaces", *Comput. Methods Appl. Math.*, 17(2017), no. 4, 601-616.

