◉相关文献
◆ 中国人口规模与年龄结构矛盾...

带移民因素的一类偏微分人口模型整体解的存在唯一性

作者:代云仙

摘要:人口迁移对人口发展的过程产生影响，本文对一类考虑到移民因素的人口模型，运用特征线法得到解的递推表达式，并证明了整体解的存在唯一性。

关键词:偏微分方程;相容性条件;特征线法;存在唯一性;一致收敛

在李大潜提出的描述人口的主部为常系数的一阶线性偏微分方程模型[1]的基础之上，考虑到移民对人口发展的过程的影响，得到了下述方程:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}=-d(x)p(t,x)+f(t,x)^{[2]} \qquad (0.0)$$

函数p(t，x)表示任意固定时刻t，人口按年龄坐标x的分布密度，d(x)为死亡率，f(t，x)为流动人口在任意固定时刻t按年龄坐标x的分布密度。

为此，我们考虑如下的定解问题:

$$(H)\begin{cases}\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial x}=-d(x)p(t,x)+f(t,x) & (t>0,\ 0\leqslant x<A) \quad (0.1)\\ t=0:\ p(0,x)=p_0(x) & (0\leqslant x<A) \quad (0.2)\\ x=0:\ p(t,0)=\displaystyle\int_a^A b(\xi)p(t,\xi)d\xi & (t>0) \quad (0.3)\end{cases}$$

这是一个非局部的定解问题，本文首先在不同的区域作变换，把定解问题(H)转化为一个线性齐次偏微分方程的求解问题，利用特征线法，得到定解问题(H)的唯一解。

1 主要结果

在本文中作如下假设:

1°: 在区间[0, A]上, $p_0(x)>0$, 且适当光滑;

2°: 在区间[0, A]上, $d(x)\geqslant 0$, 且适当光滑; 而当 $x\to A-0$ 时, $d(x)\to+\infty$, 使 $\int_0^x d(\xi)d\xi\to+\infty$;

3°: 在区间 $\{(t,x)|\,t\geqslant 0,\ 0\leqslant x<A\}$ 上, $f(t,x)$ 适当光滑.

考虑定解问题(H), 并设成立如下:

零阶相容性条件: $$p_0(0)=\int_a^A b(\xi)p_0(\xi)d\xi \qquad (1.1)$$

及一阶相容性条件(1.2)，则由(1.13)给出的函数p(t，x)为该定解问题在区域{(t，x)|t≥0，0≤x

证明： 首先我们证明由(1.13)给出的函数p(t，x)的整体连续性，在直线x=t上，由(1.7)式和(1.12)式给出的函数p(t，x)分别为

$$p(t,x)\big|_{\tau=t} = e^{-\int_0^x d(\tau)d\tau}\left[p_0(0) + \int_0^{\tau} f(\tau,\tau)e^{\int_0^{\tau} d(\omega)d\omega}d\tau\right]$$

及 $$p(t,x)\big|_{\tau=t} = e^{-\int_0^x d(\tau)d\tau}\left[\int_a^A b(\zeta)p_0(\zeta)d\zeta + \int_0^{\tau} f(\tau,\tau)e^{\int_0^{\tau} d(\omega)d\omega}d\tau\right]$$

由零阶相容性条件(1.1)可知二者相等，故解在x=t上连续，在x≤t的区域内，由递推公式(1.13)可知，只要p(t，x)在直线x=t上连续，就可逐次推得p(t，x)的整体连续性。

其次讨论由(1.13)式给出的函数p(t，x)的连续可微性，根据(0.1)式和求解过程，实际上只需证明 p(t，x) /t，在直线x=t上连续即可，由(1.13)式在区域G1内

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = e^{-\int_{x-t}^{x} d(\tau)d\tau}\Big[& -d(x-t)p_0(x-t) - p_0'(x-t) \\ & + \int_{x-t}^{\tau} \frac{\partial f(\tau+t-x,\tau)}{\partial t} e^{\int_{x-t}^{\tau} d(\omega)d\omega}d\tau + f(0,x-t)\Big]\end{aligned} \tag{1.14}$$

在区域 G_2 内

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = e^{-\int_0^x d(\tau)d\tau}\Big[& \int_a^A b(\zeta)\frac{\partial p(t-x,\zeta)}{\partial t}d\zeta \\ & + \int_0^{\tau} \frac{\partial f(\tau+t-x,\tau)}{\partial t} e^{\int_0^{\tau} d(\omega)d\omega}d\tau\Big]\end{aligned} \tag{1.15}$$

由(1.14) 可知，当 $x\to t^+$，(即 $x>t, x\to t$ 时)

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = e^{-\int_0^x d(\tau)d\tau}\Big[& -d(0)p_0(0) - p_0'(0) \\ & + \int_0^{\tau} \frac{\partial f(\tau,\tau)}{\partial t} e^{\int_0^{\tau} d(\omega)d\omega}d\tau + f(0,0)\Big]\end{aligned} \tag{1.16}$$

由(1.15) 可知，当 $x\to t^-$，(即 $x<t, x\to t$ 时)

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = e^{-\int_0^x d(\tau)d\tau}\left[\int_a^b b(\zeta)\frac{\partial p(0,\zeta)}{\partial t}d\zeta + \int_0^{\tau} \frac{\partial f(\tau,\tau)}{\partial t} e^{\int_0^{\tau} d(\omega)d\omega}d\tau\right] \quad 1.17)$$

由方程(0.1)和初始条件(0.2)及一阶相容性条件(1.2)可知，二者相等，故可知p(t，x)在x=t上连续可微，由递推公式(1.13)，在x≤t的区域内各特征线x=t-ka(k=1，2，…)上p(t，x)的连续可微性可同样依次推得，以上就证明了解的整体存在性。由递推公式(1.13)可知，若p0(x)≡0，必有p(t，x)=0，故解是唯一的。

2 推广

本文的方法可直接应用于假设死亡率不仅与年龄x有关,而且和时间t有关的人口模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial p(t,x)}{\partial x} = -d(t,x)p(t,x) + f(t,x) & (t\geqslant 0,\ 0\leqslant x<A) \\ t=0:\ p(0,x) = p_0(x) & (0\leqslant x<A) \\ x=0:\ p(t,0) = \displaystyle\int_a^A b(\zeta)p(t,\zeta)d\zeta & (t\geqslant 0)\end{cases}$$

在类似的假设下，可有解存在唯一。

参考文献

1 谷超豪、李大潜、沈玮熙等.应用偏微分方程.北京:高等教育出版社，1993.

2 宋健，于景元.人口控制论.北京:科学出版社，1985.

3 黄炯.Verhulst型的偏微分方程人口模型整体解的存在唯一性研究.云南师大硕士

文章来源：云南师范大学学报 第20卷第4期