[2009年7月]对美式期权定价的蒙特卡洛模拟方法的研究

作者：[易艳春 吴雄韬] 来源：[本站] 浏览：

一、引言
期权是最重要的金融衍生工具之一。合理定价是期权发挥功能的基础。对于欧式期权，我们
典的Black-Scholes公式［1］，由于美式期权允许期权持有人在期权到期日之前的任何时刻
法使用此公式为其定价，所以美式期权的定价一直是一个极具挑战性的话题。美式期权一般
闭解，即使在某些特殊情况下存在封闭解，也会因含有大量的奇异积分而在实际中很难直接
而寻求有效的数值方法就成共识。已有许多研究者对此进行了研究，提出了许多有用的方法
特卡洛法［2，3］、二叉树法［4］、有限元法［5］、有限差分法等。本文在此基础上，把
模拟法与二叉树法、有限差分法二种数值方法进行比较，得出它的优缺点；介绍它的基本原
单个标的资产美式看跌期权为例提供一个具体的算法实现步骤。
二、几种数值方法的分析比较
二叉树法和有限差分法采用逆向求解的方法均不适合处理具有多个标的资产的期权定价问题
为当期权的标的资产不只一种时，这两种方法会因为离散节点数量呈指数的急剧增长而变得
而且这两种方法也无法处理期权的收益依赖于标的资产价格历史信息的期权定价问题。与二
有限差分法相比，蒙特卡洛模拟法具有两个明显的优势：一是比较灵活易于实现和改进［3］
计的标准误差及收敛速度与解决问题维数独立，从而能够很好地解决基于多标的资产的高维
的定价问题［8］。但是它也存在明显的不足：一是由于它采用的是正向求解的方法，无法
个时刻继续持有期权的期权收益，从而无法比较在该时刻立即执行期权的收益与继续持有期
收益，进而无法决定是立即执行期权还是继续持有期权，所以直到几年前，人们还认为此法
有固定执行时间的欧式期权定价，直到近年来，随着数理金融学的发展，出现了一些运用蒙
法模拟美式期权定价的算法，其中影响最大的是由Longstaff和Schwartz提出的最小二乘蒙
该方法已成为目前使用蒙特卡洛模拟美式期权定价的标准方法；二是模拟结果不太精确，具
波动性，在路径数目较小时表现尤甚。为提高精度，要么增加模拟路径，要么减少波动方差
[3]对如何减少模拟方差进行了研究。
三、蒙特卡洛模拟法的算法实现步骤
蒙特卡洛模拟方法的基本原理是：在有限个离散的时间点上，根据标的资产价格的模拟样本
个时刻的截面数据，利用最小二乘回归法求得继续持有期权的期望收益，并将其与该时刻立
权的收益相比较，如果后者大于前者，则立即执行期权，否则，继续持有期权。
下面以单一标的资产美式看跌期权定价为例，说明蒙特卡洛法的算法实现步骤，使我们更好
使用本方法。
设股票价格为S=（St)0≤t≤T，以该股票为标的资产的无红利支付美式看跌期权的执行价格
日为T，r为无风险利率，设标的资产价格服从几何布朗运动■=μdt+σdω，其中μ为标的资产
收益率，σ为波动率，dω为标准的布朗运动。假设期权市场是风险中性的。
（一）生产标的资产价格样本路径
将［0，T］分成N等分，则每个小区间的长度为Δt=■，在风险中性市场下，用r代替μ，则根
可将■=μdt
+σdω改写为dlnS=r-■dt+σdω，从而可得lnS■-lnS■=r-■Δt+σ■·εi，εi为服从均值为0，
的标准正态分布的随机样本。
从而可得S■=explnS■+ir-■Δt+σ■·ε■，这样由此式可得标的资产价格的一条样本路径L
1，…，ST)，j∈{1，…，M}，M为模拟样本路径的数量，经过M次模拟，可以得到样本路径矩
（二）计算每条样本路径的最优执行时间和期权收益
对美式看跌期权，在任意时刻i的执行价值为Xi=max(K-Si)。由于美式期权可以提前执行，
在决定最优执行时间时，必须权衡该时刻立即执行期权的即时收益与继续持有该期权的期望
时刻的期权价值为γi=maxXi，E［γ■|X■］e■。其中E(γi+1|Xi)e■只有通过逆向求解的方
为它依赖于下一步执行期权的决策。换句话说，为了知道现在的最优策略，我们必须首先知
最优策略，而该策略由γi=maxXi，E［γ■|X■］e■间接地定义。这正是用蒙特卡洛模拟方法
期权定价的难点所在，也是为什么过去认为蒙特卡洛方法不适合模拟美式期权定价的主要原因，因
此，直接应用γi=maxXi，E［γ■|X■］e■模拟是不可行的，为此我们需要近似上述期望。蒙特卡洛方
法就是以多项式函数近似γi=maxXi，E［γ■|X■］e■中的条件期望，其中多项式各系数通过最小二乘
回归方法得到［2，3］，然后，从后往前倒推，逐步得到各时刻的γi，直到0时刻，就得到0时刻的期
权价值。
（三）对每条样本路径的期权收益贴现并求均值
经过M次模拟后，得到M条样本路径，以及每条样本路径上最优执行时间的期权收益。由于每条样本路
径的执行时间不同，对期权收益的贴现因子也不同，所以，必须按相应的贴现因子贴现，然后求均值
即得模拟值。
四、蒙特卡洛模拟算法的收敛性和计算效率
蒙特卡洛算法的有效性包括收敛性和计算效率两个方面。它们主要取决于基函数数目，离散时间点数
目N，样本路径数目M，以及模拟随机数的产生方法。关于收敛性问题，Longstaff和Schwartz证明，令
样本路径数目M→∞，只要基函数数目足够大，则模拟期权价值收敛于真实期权价值的ε领域内（ε为任
意正数）。蒙特卡洛算法的一个重要特点是它优异的计算效率，尤其在多个标的资产美式期权定价模
拟方面，与处理多维美式期权定价模拟的随机网格方法相比，该算法的计算效率要高出600多倍。
基金项目：湖南省教育厅资助项目（08C175）
参考文献：
【1】 F Black，，M Scholes. The pricing of options and corporate liabilities[J].J Politic
al Economy，1973，81：637-654.

【2】 Longstaff，Schwartz E S.Valuing American options by simulation：a simple least squares approach [J].Review of Financial Studies，2001，14(1)：113-148.
【3】 郑承利 美式期权的几种蒙特卡洛仿真定价方法比较 [J] 系统仿真学报 2006，18(10)：2929-2935
【4】 约翰 赫尔著 张陶伟译 期权、期货及其衍生证券 [M] 华夏出版社 北京 2000
【5】 Hull J Option futures and other derivative securities[M] 2nd Edition Englewood Cliffs： Prentice Hall 1993
【6】 张铁 美式期权定价问题的数值方法 [J] 应用数学学报 2002 25(1)：113-122
【7】 李玉立 金朝嵩 美式看跌期权的差分格式 [J] 重庆建筑大学学报 2004 26(4)：100-114
【8】 胡小平 何建敏 LSSVM-Monte Carlo定价高维美式期权 [J] 东南大学学报 2006 36(1)：179-182
（作者单位：衡阳师范学院数学系）

【 评论 】【 推荐 】

评一评

正在读取…

【注】 发表评论必需遵守以下条例：

笔名：

评论：

发表评论 重写评论

[评论将在5分钟内被审核，请耐心等待]

- 尊重网上道德，遵守中华人民共和国的各项有关法律法规
- 承担一切因您的行为而直接或间接导致的民事或刑事法律责任
- 本站管理人员有权保留或删除其管辖留言中的任意内容
- 本站有权在网站内转载或引用您的评论
- 参与本评论即表明您已经阅读并接受上述条款