第六章 实际应用

§6.1 抵押贷款分析

资本市场的债务产品主要分为两大类：

- 一类为国债和企业债券
- 一类是各种形式的贷款（特别是消费贷款）

注☞ 商业贷款和消费贷款是一般企业经营活动和个人消费的主要债务形式。

从现金流的角度看，两类产品最大的区别是：

- ❖ 债券多为定期付利息、到期一次性偿还本金
- ❖ 贷款多为本金、利息同时逐渐偿还

注☞ 采用两种形式的主要原因是两类债务的信用程度的差异，前者信用高，本金支付没有信用风险，后者则不同。

商人计息法 (Merchant's Rule)

商人计息法——以单利方式将贷款本利和还款本利累计到贷款期限结束时刻，然后计算未结利息和本金

注☞ 在十九世纪之前该方法为常用的计息方法，而本质上即为单利计算。

注☞ 商人计息法对于短期业务比较适用，但是对于长期贷款则可能会出现不合逻辑的结果。

例：1000 元两年期贷款，年利率 9%。如果第一年底还款 1085 元，问：第二年底应还款多少？

解：设第二年底应还款 K，用商人计息法，在第二年底应有

$$1000(1+2\times 9\%)=1085(1+9\%)+K$$

即

$$1180=1182.65+K$$

由此可得 $K=-2.65$元

从而借款人（债务人）变成了贷款人（债权人）！

分析：在第一年底的时候，贷款的本息和应为 1090 元，1085 元还款并没有还清当时的应计本利和。

思考：为什么会出现这样的情形？

注☞ 1795 年 Virginia 州 Ross v Pleasants 案，债权人和债务人角色出现了互换

美国计息法（United States Rule）

1839 年产生了新的计息法，即所谓的“美国计息法”（United States Rule），该计息法要求：

1）在每次的贷款偿还时刻或有新的贷款余额计入的时刻，都要进行贷款本金和利息的结算

2）借款人的付款应当首先用来支付任何应计利息，超过的部分用来抵消未偿还贷款余额

3）贷款余额为上一次结算时的余额与应计利息（单利计算）之和，再扣除（或加上）本次的还款（贷款）金额

注☞ 美国计息法本质上是单利和复利的混合，每次新的还款（贷款）都将重新开始贷款余额的计息，利息力将随之变大。

例：用美国计息法考虑上例

解：第一年底的贷款余额为

$$1000-(1085-1000\times 9\%)=5\text{元}$$

从而第二年底的还款额应为

$$5(1+9\%)=5.45\text{元}$$

注☞ 债权人和债务人角色没有出现互换

例：某人借款 1000 元，利率 10%，12 个月内还清。若借款人在三月底还 200 元，在八月底还 300 元，计算第十二个月底应还的金额。

1）用商人计息法计算；

2）用美国计息法计算；

3）用复利计算。

解：

1）用商人计息法计算

第十二个月底应还的金额为

$$1000(1+10\%)-200(1+\frac{3}{4}\times 10\%)-300(1+\frac{1}{3}\times 10\%)=575$$

2）用美国计息法计算

三月底的应计利息为

$$1000\times(1/4)\times10\% = 25.00$$

从而三月底还的 200 元中有 25 元为偿还利息，剩余的 175 元为偿还本金，由此可得贷款余额为

$$1000 - 175 = 825 \text{ 元}$$

八月底的应计利息为

$$825\times(5/12)\times10\% = 34.38$$

从而八月底还的 300 元中有 34.38 元为偿还利息，剩余的 265.62 元为偿还本金，由此可得贷款余额为

$$825 - 265.62 = 559.38 \text{ 元}$$

第十二个月底应还的金额为

$$559.38\left[1 + (1/3)\times 10\%\right] = 578.03 \text{ 元}$$

3）用复利计算

第十二个月底应还的金额为

$$1000\times 1.1 - 200\times 1.1^{3/4} - 300\times 1.1^{1/3} = 575.50\text{元}$$

消费信贷保护法案（Consumer Credit Protection Act）
诚实贷款法案（Truth in Lending Act）

1968 年由美国国会通过的“消费信贷保护法案”中建立了消费信贷中的各种规则，规定了贷款人在同借款人交易时必须公开的一些情况。

该法案规定必须将融资费用和贷款年利率（APR）以及任何特殊的贷款条件等告知顾客。

该法案要求计算的两个重要指标：

1）**融资费用**（finance charge）——包括利息在内的由消费者为取得消费贷款而支出的所有费用

2）**年百分率**（annual percentage rate / APR）——用简单百分比数字表示消费者所支付的平均贷款成本

在贷款之初借款人为获得贷款必须付出一些固定的费用，如：与贷款金额成比例的一部分费用（一般用点数表示），以及所有业务必须支出的固定费用，如：贷款手续费、服务费、信贷报告费用和信用保险费等。

注☞ APR 用精算方法（actuarial method）计算

具体业务中的 APR 一般是用名利率方式标出的（计息频率与还款频率相同），而对应的实际还款周期可以是不同的。

例：两种贷款项目都标出"APR=12%"，一种是按月还贷，另一种是按季还贷，则两种贷款的实际贷款利率是不同的。

诚实信贷要求：区分开放型信贷(open-end credit)与封闭型信贷(closed-end credit)

开放型信贷——贷款期限没有事先规定，贷款的财务费用每个周期（如一个月）公布一次，贷款人在一定限度内可以随时贷款或还贷。例如信用卡。

封闭型信贷——即为传统意义上的贷款，贷款期限、额度等都要事先明确规定。例如分期偿还的贷款。

注☞ 对于开放型信贷，只需在每次结算时计算融资费用即可，APR 是未结贷款余额应付的挂牌年利率。

例：某信用卡公司每月底对用户账面的余额按照1.75%计算利息，如果用 APR 表示则为“APR=21%”

分期偿还的贷款 APR 的计算

L = 实际贷款金额（已扣除相关费用后的诚实信贷额）

K = 融资费用

R = 分期付款金额

m = 每年的付款次数

n = 贷款期限内总的付款次数

j = 每个付款周期的实际利率

i = 年百分率、APR

结论：

1) $K = nR - L$ **，即：融资费用等于还款总额减去实际贷款额**

2) $i = mj$**，其中** j **满足价值方程：** $Ra_{\overline{n}|j} = L$

注☞ 年百分率 APR 和融资比 $\frac{K}{L}$ **（融资费用占实际贷款额的比例）两个量都可以表示融资（贷款）成本，一般的更侧重用 APR 衡量贷款成本。**

例：一年期消费贷款 1 万元，每月偿还 860 元，计算贷款成本。

解：融资费用为

$$K = 12 \times 860 - 10,000 = 320$$

用 j 表示每月的实际贷款利率，则有

$$860 a_{\overline{12}|j} = 10,000 \quad \text{或} \quad a_{\overline{12}|j} = 11.6279$$

由此可得

$$j \approx 0.488\% \quad \Rightarrow \quad APR \approx 5.856\%$$

注☞ 贷款年利率为 5.856%，而项目的融资费用 320 元占贷款额 10000 元的比例仅仅为 3.2%，看上去远远低于相应的贷款年利率！

注☞ 融资比 3.2%只与还款额度有关，与还款的早晚无关，而年百分率则不然。

例：如果保持总的还款额（10320）不变，但是改变还款的方式：

1）一种极端的情况是第一个月底一次还清，则融资比仍然为 3.2%，月实际利率为 3.2%，年利率为 38.4%；

2）另一种极端的情况年底一次还清，融资比仍然为 3.2%，年百分率也是 3.2%。

对于同一个贷款项目的年百分率和融资比有如下关系

$$\frac{K+L}{n} a_{\overline{n}|j} = L$$

从而

$$\frac{K}{L} = \frac{n}{a_{\overline{n}|j}} - 1$$

由于有近似公式

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|j}} \approx \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n} j$$

由此可得

$$\frac{K}{L} \approx \frac{n+1}{2} j = \frac{n+1}{2m} i \quad \text{或等价的} \quad i \approx \frac{2m}{n+1} \frac{K}{L}$$

在上例中，融资比为 3.2%，从而可知年百分比约为

$$i \approx \frac{2m}{n+1} \frac{K}{L} = \frac{24}{13} \times 3.2\% = 5.9\%$$

注☞ 不难看出，如果当还款期不是短期时（如 2 年以上），则年百分率将小于融资比。

例：一般需要融资 20 万元购买新车。分销商考虑如下的两年逐月分期付款方式：

方式 A——APR 为 8%

方式 B——APR 为 10%，同时当前价格优惠 8%

试分析两种方式的差异。

解：可以从两方面来进行分析

1）比较每月还款额度

如果选择 A，则每月的还款为

$$R^A = \frac{200,000}{a_{\overline{24|}\frac{8\%}{12}}} = \frac{200,000}{22.1105} = 9046$$

如果选择 B，则每月的还款为

$$R^B = \frac{200,000(1-8\%)}{a_{\overline{24}|10\%/12}} = \frac{184,000}{21.6709} = 8491$$

结论：从购车人角度看，方式 B 的成本要低于方式 A，所以应该选择方式 B。

2）比较融资成本

2.1）从 APR 来看，由于方式 A 为 8%，而方式 B 为 10%，从而方式 A 的融资成本较低。

2.2）从融资比来看，如果选择方式 A，则有

$$K_A = 24 \times R^A - 200{,}000 = 17092$$

从而融资比为8.55%

选择方式 B，则有

$$K_B = 24 \times R^B - 184{,}000 = 19776$$

从而融资比为10.75%

结论：方式 A 较方式 B 的融资成本低。

注☞ 对于购车人来说，需要同时考虑所购车的价格和融资成本两个方面的情况。

不动产抵押贷款

以指定的不动产作为抵押所取得的贷款。在这种贷款形式下，借款者必须预先确定偿还计划，如果借款者违约，则贷款者有权取消借款者抵押物赎回权，即贷款者可以通过处置抵押物来确保收回债权。

在消费贷款中不动产抵押贷款是一类特别重要的贷款。这种贷款的金额一般较大，是许多家庭的最大一项支出，同时，它的期限也比较长，一般为 15—30 年。

可用作的抵押物有住宅资产、农场资产、商业性资产等。

应用诚实贷款法案于非商业性的不动产抵押贷款与其它的消费贷款的特别之处：

抵押贷款的还贷周期一般是一个月，且一般在月初偿还，偿还金额要由贷款金额决定。如果贷款的起始日期不是月初，一般要利用单利方法将该月剩余时间的应付利息计算出来，并在贷款日付出，时间用“实际天数/365”表示。

不动产的所有权在法律上从一方转移到另一方的时间被称为“结算日”（settlement date）。（一般情况下，就是贷款起始日期）

在不动产抵押贷款的结算日要支付许多的附加费用和手续费：

最大的一部分费用是贷款的“始发手续费”（origination fee），一般用贷款额的点数表示：1 个点表示贷款额的 1%。

例如：十万元的抵押贷款如果始发手续费为两个点，则要支付 2000 元。

其它费用包括：信贷报告费用、调查费用、文件准备费用、所有权调查费用、记录费用、印花税票（tax stamps）和不动产估价（appraisal）等。

注☞ 依据诚实贷款法案，有些费用要摊在年百分率APR 中，从而实际的 APR 要高于原始贷款的年利率。原始贷款年利率只用于确定每月的还款金额和构造摊还表,也称为“上市贷款利率”。

不动产抵押贷款计算融资费用和 APR 的具体方法

计算使用记号：

R = 每次还款额

m = 12（默认值）

n = 还款的总次数

L = 抵押贷款的申请金额

注☞ 不是实际得到的贷款金额

Q = 必须摊入 APR 中的贷款费用

L^* = 由诚实贷款法案确定的实际融资金额

注☞ $L^* = L - Q$，相当于前面讨论中的L

j' = 市场贷款月利率

i' = 市场贷款年利率 (月换算名利率)

j = 实际贷款月利率

i = 实际贷款年利率 (月换算名利率)

融资费用为总还款额与融资金额的差，即：

$$K = nR - L^*$$

市场贷款月利率满足：

$$R a_{\overline{n}|j'} = L$$

市场贷款(名义)年利率满足：

$$i' = 12j'$$

实际贷款月利率满足：

$$R a_{\overline{n}|j} = L^*$$

从而年百分率 APR 为：

$$i = 12j$$

注☞ 年百分率 APR 大于市场贷款利率 i'

注☞ $$\frac{K+L^*}{n} a_{\overline{n}|j} = L^*$$

例：某家庭购买房产需要五十万元，首次付款 20%，余额用 30 年抵押贷款方式逐月付清，贷款年利率 8.1%。结算时的费用为固定费用 800 元再加上两个点，其中的 1 个半点和固定费用中的一半要摊在每年的 APR 中。若购房日期为 7 月 12 日，给出贷款结算时所需要的计算。

解：首付款金额为

$$500{,}000 \times 20\% = 100{,}000$$

从而原始贷款金额为

$$L = 500{,}000 - 100{,}000 = 400{,}000$$

在 7 月 12 日所应支付的七月份余下日子 (共计 20 天)的应计利息 (单利)为

$$\left(\frac{20}{365}\right)\times 0.081\times 400,000 = 1775.34$$

又有

$$i' = 0.081 \quad \Rightarrow \quad j' = 0.675\%$$

从而从 8 月 1 日开始的(期初方式)正常月偿还金额为

$$R = \frac{400,000}{\ddot{a}_{\overline{360}|.00675}} = \frac{400,000}{1.00675\times 134.9987} = 2943.12$$

在结算日摊入 APR 的费用为：

$$Q = 1.5\% \times 400{,}000 + \frac{1}{2} \times 800 = 6400$$

从而实际贷款额为

$$L^* = 400{,}000 - 6400 = 393{,}600$$

融资费用为

$$K = 360 \times 2{,}943.12 - 393{,}600 = 665{,}923.20$$

最后，APR 为

$$2943.12\ddot{a}_{\overline{360}|j} = 393{,}600$$

由此可得

$$j \approx 0.69\% \quad \Rightarrow \quad APR = 8.28\%$$

注☞ APR=8.28%大于市场贷款利率 8.1%

贷款本金倾斜

在不动产抵押贷款的偿还中，如果用摊还表来考虑，则可以发现，前面的还款几乎全部用于还利息，而后面的还款几乎完全用于还本金。

所以在购房抵押贷款中，还贷款数年后，不动产抵押的贷款余额基本上没有降低多少，这就是所谓的**贷款本金倾斜**（向后）现象。

可调利率的抵押贷款

近几年出现的“**可调利率的抵押贷款**”（adjustable rate mortgage, ARM）是与传统的“**固定利率抵押贷款**”（fixed rate mortgage）相对应的。

抵押贷款利率往往盯住一些不受银行或储蓄贷款机构控制的经济指数，如美国国库券利率和平均国民贷款利率，周期地进行利率调整，周期通常为 1 年、3 年或 5 年。

利率的调整权在贷款人手里。

作为承担了利率上升风险的一种补偿，借款人在取得可调整利率抵押贷款之初所付利息比相同期限的固定利率抵押贷款利息要低。

担心利率急剧上升的房地产主可能选择固定利率贷款；而认为利率将会有节制地上升、保持平稳、或下降的人则选择可调整利率抵押贷款 ARM。

从贷款一方看，虽然 ARM 在开始时有低于固定抵押贷款利率的贷款利率，但可以保证在未来的 15 到 30 年间实际利率与固定利率相同。

在利率上升期间，贷款人将利率锁定在固定利率上；在利率下降期间，贷款人可以通过用较低的利率对贷款或部分贷款进行再融资。

从借款人一方看，ARM 的吸引力在于开始的利率较低，月偿还金额也就较低。但是，固定利率贷款的利率波动风险是由贷款人承担的；而 ARM 贷款的利率波动风险则被转嫁到借款人身上。

注☞ 我国目前的住房抵押贷款就是可调利率抵押贷款 ARM

例：某人贷款 65,000 元，期限 30 年，为可调利率贷款。第一年的利率为 8%，如果从第二年开始利率增为 10%，计算月偿还金额的增长幅度。

解：按照期初年金方式，第一年的月偿还金额为

$$\frac{65,000}{\ddot{a}_{\overline{360|}\,.08/12}}=\frac{65,000}{(1+\frac{8\%}{12})\times 136.2835}=473.788$$

利率调整后新的月偿还金额为

$$473.788\frac{\ddot{a}_{\overline{348|}\,.08/12}}{\ddot{a}_{\overline{348|}\,.10/12}}=565.053$$

绝对增量为

$$473.788\left[\frac{\ddot{a}_{\overline{348|}\,.08/12}}{\ddot{a}_{\overline{348|}\,.10/12}}-1\right]=91.27$$

增长幅度为

$$\frac{\ddot{a}_{\overline{348|}\,.08/12}}{\ddot{a}_{\overline{348|}\,.10/12}}-1=19.3\%$$

APR 近似计算和分析

APR 的精确方程为

$$\frac{K+L}{n} a_{\overline{n}|j} = L \qquad j = \frac{APR}{m}$$

其中：L表示实际贷款金额， K表示融资费用，每次的偿还金额为：$\dfrac{K+L}{n}$

注☞ APR 的计算可通过 Excel 求数值解。

传统近似计算方法可以帮助对基本概念的理解。

下面介绍四种 APR 近似计算的方法。

基本记号：

每年分为m个时间段，年百分率 APR 用 表示，则每个时间段内的实际利率为 $j=\dfrac{i}{m}$

用$B_{t/m}$表示在时刻$\dfrac{t}{m}$的未结贷款余额，$B_{0/m}=L$，则融资费用的计算可表为

$$\frac{i}{m}\sum_{t=0}^{n-1}B_{t/m}=K$$

即：融资费用K等于每个时间段内未结贷款余额依 APR 计算的应计利息之和。

从而 APR 可以表示为

$$i=\frac{mK}{\sum_{t=0}^{n-1}B_{t/m}}$$

注☞ 这里的 K 是在计算 i 之前就已经计算好的。

注☞ 四种近似计算 APR 的方法都是从上述公式出发得到的，区别在于如何看待每次分期付款中的偿还本金和所付利息，即如何计算未结贷款余额。

1）最大收益法（maximum yield method）

这种方法的数值结果比其它结果都大，记为$i^{\max}$

基本思想：每次的分期付款首先用于偿还本金，只有当本金全部还清后，再开始偿还利息

若假定：融资费用小于每次的付款金额，即：$K < \dfrac{K+L}{n}$，则可以得到这种方法的修正摊还表：

注☞ 在上述假定下，只有最后一次的还款才涉及付利息的问题

时间	分期付款	偿还利息	偿还本金	未结贷款余额
0				L
$\frac{1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	**0**	$\frac{K+L}{n}$	$L-\frac{K+L}{n}$
$\frac{2}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	**0**	$\frac{K+L}{n}$	$L-2\frac{K+L}{n}$
…	…	…	…	…
$\frac{n-1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	**0**	$\frac{K+L}{n}$	$L-(n-1)\frac{K+L}{n}$
$\frac{n}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	K	$\frac{K+L}{n}-K$	**0**
总和	$L+K$	K	L	

由此可以得到未结贷款余额（表中的最后一列）的和为

$$\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m} = Ln - [\frac{K+L}{n}][1+2+\cdots+(n-1)]$$

$$= Ln - [\frac{K+L}{n}][\frac{n(n-1)}{2}]$$

$$= \frac{1}{2}[L(n+1) - K(n-1)]$$

从而有

$$i^{\max} = \frac{2mK}{L(n+1) - K(n-1)}$$

注☞ 上述公式也可以通过假定整个贷款期间为单利计算得到（即商人计息法），因为有

$$L[1+\frac{i}{m}n]=\sum_{t=1}^{n}\frac{K+L}{n}[1+\frac{i}{m}(n-t)]$$

由此可得

$$\frac{i}{m}[nL-\frac{n-1}{2}(K+L)]=K$$

即

$$i=\frac{mK}{nL-\frac{n-1}{2}(K+L)}=\frac{2mK}{(n+1)L-(n-1)K}$$

注☞ 当n较大时，应有$K > \frac{L}{n-1}$，即$K > \frac{K+L}{n}$。

可以计算融资费用大于每次付款条件下的一般公式，如假设有

$$\frac{K+L}{n} < K < 2\frac{K+L}{n}$$

则同样的可以构造摊还表（注意摊还表中的变化），

时间	分期付款	偿还利息	偿还本金	未结贷款余额
0				L
$\frac{1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	0	$\frac{K+L}{n}$	$L-\frac{K+L}{n}$
$\frac{2}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	0	$\frac{K+L}{n}$	$L-2\frac{K+L}{n}$
…	…	…	…	…
$\frac{n-2}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	0	$\frac{K+L}{n}$	$L-(n-2)\frac{K+L}{n}$
$\frac{n-1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$K-\frac{K+L}{n}$	$2\frac{K+L}{n}-K$	0
$\frac{n}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$\frac{K+L}{n}$	0	0
总和	$L+K$	K	L	

由此可得未结贷款余额（表中的最后一列）的和为

$$\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m} = L(n-1)-[\frac{K+L}{n}][1+2+\cdots+(n-2)]$$

$$= L(n-1)-[\frac{K+L}{n}][\frac{(n-1)(n-2)}{2}]$$

$$= \frac{1}{2}[L\frac{(n+2)(n-1)}{n} - K\frac{(n-2)(n-1)}{n}]$$

从而有

$$i^{\max} = \frac{2mK}{L\frac{(n+2)(n-1)}{n} - K\frac{(n-2)(n-1)}{n}}$$

思考：为什么这种算法得到的数值结果要大于真实的APR？

分析：因为表中计算的$B_{t/m}$一定小于真实的$B_{t/m}$，从而导致$i=\frac{mK}{\sum_{t=0}^{n-1}B_{t/m}}$变大！

2）最小收益法（minimum yield method）

这种方法的数值结果比其它结果都小，记为$i^{\min}$

基本思想：每次的分期付款首先用于偿还利息，只有当利息全部还清后，再开始偿还本金

若假定：融资费用小于每次的付款金额，即：

$K<\dfrac{K+L}{n}$，则可以得到这种方法的修正摊还表：

注☞ 在上述假定下，第一次的还款即可付清全部利息

时间	分期付款	偿还利息	偿还本金	未结贷款余额
0				L
$\frac{1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	K	$\frac{K+L}{n}-K$	$(n-1)\frac{K+L}{n}$
$\frac{2}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	0	$\frac{K+L}{n}$	$(n-2)\frac{K+L}{n}$
…	…	…	…	…
$\frac{n-1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	0	$\frac{K+L}{n}$	$\frac{K+L}{n}$
$\frac{n}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	0	$\frac{K+L}{n}$	0
总和	$L+K$	K	L	

由此可得未结贷款余额的和为

$$\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m} = [\frac{K+L}{n}][1+2+\cdots+n]-K$$

$$=[\frac{K+L}{n}][\frac{n(n+1)}{2}]-K$$

$$=\frac{1}{2}[L(n+1)+K(n-1)]$$

从而有

$$i^{\min} = \frac{2mK}{L(n+1)+K(n-1)}$$

思考：为什么这种算法得到的数值结果要小于真实的APR？

分析：因为表中计算的$B_{t/m}$一定大于真实的$B_{t/m}$，从而导致$i=\dfrac{mK}{\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m}}$变小！

3）固定比率法（constant ratio method）

假定每次付款中以固定比例偿还本金、固定比例偿还利息

该方法的数值结果记为i^{cr}

相应这种方法的修正摊还表为

注☞ **通常的摊还，偿还本金的比例在逐渐增大、而偿还利息的比例在逐渐减少**

时间	分期付款	偿还利息	偿还本金	未结贷款余额
0				L
$\frac{1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$\frac{K}{n}$	$\frac{L}{n}$	$[\frac{n-1}{n}]L$
$\frac{2}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$\frac{K}{n}$	$\frac{L}{n}$	$[\frac{n-2}{n}]L$
…	…	…	…	…
$\frac{n-1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$\frac{K}{n}$	$\frac{L}{n}$	$\frac{1}{n}L$
$\frac{n}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$\frac{K}{n}$	$\frac{L}{n}$	0
总和	$L+K$	K	L	

由此可得未结贷款余额的和为

$$\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m} = L[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}]$$

$$= L[\frac{(n+1)}{2}]$$

从而有

$$i^{cr} = \frac{2mK}{L(n+1)}$$

4）直接比率法（direct ratio method）

对本金和利息给以非常接近精算方法的近似结果，即相应的摊还表中的利息部分是随着时间的推移而递减的、本金部分是随着时间的推移而递增的

该方法的数值计算结果记为 i^{dr}

例：考虑一年期的贷款，因为数字 1 到 12 的和为 78，所以，直接比例法假定第一个月偿还融资费用的 12/78，第二个月偿还融资费用的 11/78，…，最后一个月偿还融资费用的 1/78

注☞ 该方法也称为 78 计算法（Rule of 78）

引入记号 s_r：

$$s_r = 1 + 2 + \cdots + r = \frac{r(r+1)}{2}$$

则可以得到该方法的修正摊还表：

时间	分期还款	偿还利息	偿还本金	未结贷款余额
0				L
$\frac{1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$K(\frac{n}{s_n})$	$\frac{K+L}{n}-K\frac{n}{s_n}$	$(n-1)\frac{K+L}{n}-K\frac{s_{n-1}}{s_n}$
$\frac{2}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$K\frac{n-1}{s_n}$	$\frac{K+L}{n}-K\frac{n-1}{s_n}$	$(n-2)\frac{K+L}{n}-K\frac{s_{n-2}}{s_n}$
…	…	…	…	…
$\frac{n-1}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$K\frac{2}{s_n}$	$\frac{K+L}{n}-K\frac{2}{s_n}$	$\frac{K+L}{n}-K\frac{s_1}{s_n}$
$\frac{n}{m}$	$\frac{K+L}{n}$	$K\frac{1}{s_n}$	$\frac{K+L}{n}-K\frac{1}{s_n}$	0
总和	$L+K$	K	L	

由此可以得到未结贷款余额的和为

$$\sum_{t=0}^{n-1} B_{t/m} = [\frac{K+L}{n}][1+2+\cdots+n] - K[\frac{S_1}{S_n}+\cdots+\frac{S_{n-1}}{S_n}+1]$$

$$= [\frac{K+L}{n}][\frac{n(n+1)}{2}] - K[\frac{n+2}{3}]$$

$$= \frac{1}{2}[L(n+1)+\frac{1}{3}K(n-1)]$$

从而有

$$i^{dr} = \frac{2mK}{L(n+1)+\frac{1}{3}K(n-1)}$$

例：一年期消费贷款 1 万元，每月偿还 860 元。用上述四种近似方法计算该分期付款贷款的利率。

解：

方法 1：最大收益法

$$i^{\max}=\frac{2\times 12\times 320}{10,000\times 13-320\times 11}=6.072\%$$

方法 2：最小收益法

$$i^{\min}=\frac{2\times 12\times 320}{10,000\times 13+320\times 11}=5.752\%$$

方法 3：固定比率法

$$i^{cr} = \frac{2\times 12\times 320}{10,000\times 13} = 5.908\%$$

方法 4：直接比率法

$$i^{dr} = \frac{2\times 12\times 320}{10,000\times 13 + 320\times \frac{11}{3}} = 5.855\%$$

结论：精确解为 $APR \approx 5.856\%$**，从而四个近似方法得到的数值解与精确解之间的关系为**

$$i^{\min} < i^{dr} < i = 5.856\% < i^{cr} < i^{\max}$$

预收融资费用（unearned finance charge）

预收融资费用——在有些贷款项目中，经过一段时间后，借款人可能希望加快还贷进程，或者是将余额一次还清，或者是对余额进行再融资，但无论怎样，原始融资费用中的一部分是借款人必须支付的，因为这部分费用是贷款人已经支出的费用，无论还贷时间长短都要偿还的。

例：在上例的消费贷款中，如果只用上半年的六次分期付款就完成还贷，分别用（1）精算方法，（2）78法则，计算借款人的预收融资费用。

解：用直接比率法求得近似 APR=5.85%。
本例中全部的融资费用即为贷款利息。

（1）在六月底的未结贷款余额用预期法计算为

$$860a_{\overline{6}|\frac{5.85\%}{12}} = 5073.09$$

后半年的计划还款总和为

$$\mathbf{6 \times 860 = 5160}$$

从而两者的差为

$$5160 - 5073.09 = 86.91$$

如果按照未结贷款余额提前还贷，这个差值是无法收回的，所以应该是一种预收的融资费用。

（2）已知 $s_6 = 21$**，**$s_{12} = 78$**，总的融资费用为 320 元，按照比例后半年的预收融资费用为**

$$\frac{21}{78}\times 320 = 86.15$$

结论：已交付的融资费用为

$$\frac{12+11+\cdots+7}{78}\times 320 = 233.85$$

抵押贷款债务的证券化

问题的提出：

在前面讨论抵押贷款的时候，总是假设每一笔现金流收到的时间都是确定的，借款人不会在规定的时间之前偿还贷款。

在实际中借款人却经常有可能会提前偿还贷款，这使得抵押贷款的现金流成为不确定的。

注☞ 提前偿还会有一定的代价，例如需要多支付一个月的利息金额等。

利用抵押贷款构造的**抵押支持证券**(mortgage backed securities / MBS) 虽然不能减少提前支付风险的总的大小，但却可以改变风险在不同投资者中的分布。

比如，投资者如果只购买某一笔抵押贷款，则很难预测提前支付发生的可能性，但如果购买 10 笔或更多笔抵押贷款的组合，由于每笔贷款的提前支付风险的相互关系，就有可能较好的预测提前支付。

抵押贷款债务产生的证券产品是一类投资工具，它的现金流由支持它的抵押按揭贷款合约决定。

基本原理：

抵押按揭贷款的贷款方（也可以是另外的发起人）将一定量的按揭合约汇集在一起，从资本市场（投资者）为这些债务合约进行融资，同时承诺按一定的回报方式回报投资者。

抵押贷款债务产生的主要证券产品——抵押支持证券包括：

- **抵押贷款转递证券 (mortgage pass- through)**
- **担保抵押贷款证券 (collateralized mortgage obligation / CMO)**
- **剥离抵押贷款证券 (stripped mortgage-backed securities)**

MBS 现金流的基本特征

抵押贷款转递证券

投资机构购买多笔抵押贷款，然后打包以作为债券的担保品，这种证券的现金流就是抵押贷款的现金流扣除证券发行费用及其它服务费用后的部分

例：某投资机构购买了 10 笔贷款组成一个贷款池，总价值为 100 万元。然后分成 40 个单位（即证券的份额），每个单位价值 2 万 5 千元，即每个单位的现金流为总现金流的 2.5%。

注☞ 这个过程称为证券化，抵押贷款的证券化被称为是转递（Pass-through）

注☞ 抵押贷款转递证券使得投资者可以较少的资金获得相应比例的 10 笔贷款的现金流收入，减少了交易成本。

担保抵押贷款证券

投资于抵押贷款转递证券的投资者面临所有贷款的提前支付的风险，而担保抵押贷款证券则是将每个月的现金流进行重新分配，从而重新分配提前支付的风险，使得不同的投资者面临不同的风险。

例：将 100 万元贷款总额分成三个部分，分别为 A 部分 40 万元，B 部分 35 万元，C 部分 25 万元。

三个等级的利息支付是以占总价值的比率来确定利息的金额，而本金支付则采取顺序支付的方法，即将全部所得的正常支付本金和提前支付本金都先用来支付 A 的本金，直到 A 的所有本金完全支付后，再开始支付 B 的本金，而 C 的本金支付需要等到 B 的所有本金完全支付后才进行。

从而 A 的期限较短，B 的期限长一些，C 的期限是最长的。投资者可以根据各自的资产负债结构的不同选择不同期限的债券。

剥离抵押贷款证券

将抵押贷款的所有利息偿还和本金偿还的现金流分解成两种债券

- 包含所有利息的债券称为 IO 债券（Interest-Only Bond）
- 包含所有本金 PO 债券（Principal-Only Bond）

注☞ 下面以抵押贷款转递证券为例介绍在抵押贷款债务的证券化过程中的主要计算问题，具体为产品定价和价值评估中的计算。

提前偿还的模式分析

提前偿还的模式分析是指对大量抵押按揭合约组成的资产池的提前偿还模式的分析。

注☞ 抵押按揭的提前偿还模式是影响抵押贷款转递证券现金流的重要因素，但只对某个个体贷款合约进行提前偿付的现金流分析很难把握。

基本计算：

1) 时间 t（$1 \le t \le n$）以月为单位

B_t——正常偿还情形第 t 月月底未结本金贷款余额

$\hat{B}_t$——实际偿还（可能有提前偿还）后第 t 个月月底的未结本金余额

注☞ $\hat{B}_0 = B_0$

R_t——不考虑提前偿还时计算的第 t 个月的计划偿还额

从而由 $\hat{B}_{t-1}$ 的定义有

$$\hat{B}_{t-1} = R_t a_{\overline{n-(t-1)}|j}$$

2) 记 PR_t 为第 t 个月月底的提前偿还量，直接用于扣除本金，则有

$$PR_t = B_t - \hat{B}_t$$

3) 记

$Q_t = \dfrac{\hat{B}_t}{B_t}$——在原计划$B_t$的条件下，第 t 个月底的剩余未偿还比例

$1-Q_t$——已被提前偿还的比例

注☞ $Q_0 = 1$

例：原计划$B_t = 99{,}000$元，因提前偿还实际的余额为$\hat{B}_t = 90{,}000$，则剩余的未偿还比例为

$$Q_t = \frac{90{,}000}{99{,}000} = 90.9\%$$

即，还有原计划的 90.9%没有提前偿还，原计划的9.1%已被提前偿还。

注☞ $\hat{B}_t \le B_t$， $Q_t \le 1$

4) 记月提前支付率（single monthly mortality rate）为

$$SMM_t = \frac{Q_{t-1} - Q_t}{Q_{t-1}} = 1 - \frac{Q_t}{Q_{t-1}}$$

即，在原计划B_t的条件下第t个月初的一个单位的本金余额，在本月内被提前偿还的可能性。

注☞ $0 < SMM_t < 1$

对任何$n>m$，有

$$\prod_{t=m+1}^{n}(1-SMM_t)=\frac{Q_n}{Q_m}$$

5) 记年提前支付率CPR_t (Conditional Prepayment Rate)为

$$1-CPR_t=\prod_{j=1}^{12}(1-SMM_{t+j}),\quad t=1,13,\cdots$$

在此基础上，提前偿还模式分析也就是$SMM_t(CPR_t)$和Q_t的模式分析，现有的方法主要有以下两种：

PSA（Public Securities Association）模式

公共证券协会提前支付标准，美国目前通用的预测提前支付的方法，是由一系列提前支付常数组成的。

PSA 提前偿还模式是以下面的“标准（100%）PSA 模式”为基础的：

$$CPR_t = \min(1, \frac{t}{30}) \cdot 6\% = \begin{cases} \frac{t}{30} \cdot 6\% & t \le 30 \\ 6\% & t > 30 \end{cases}$$

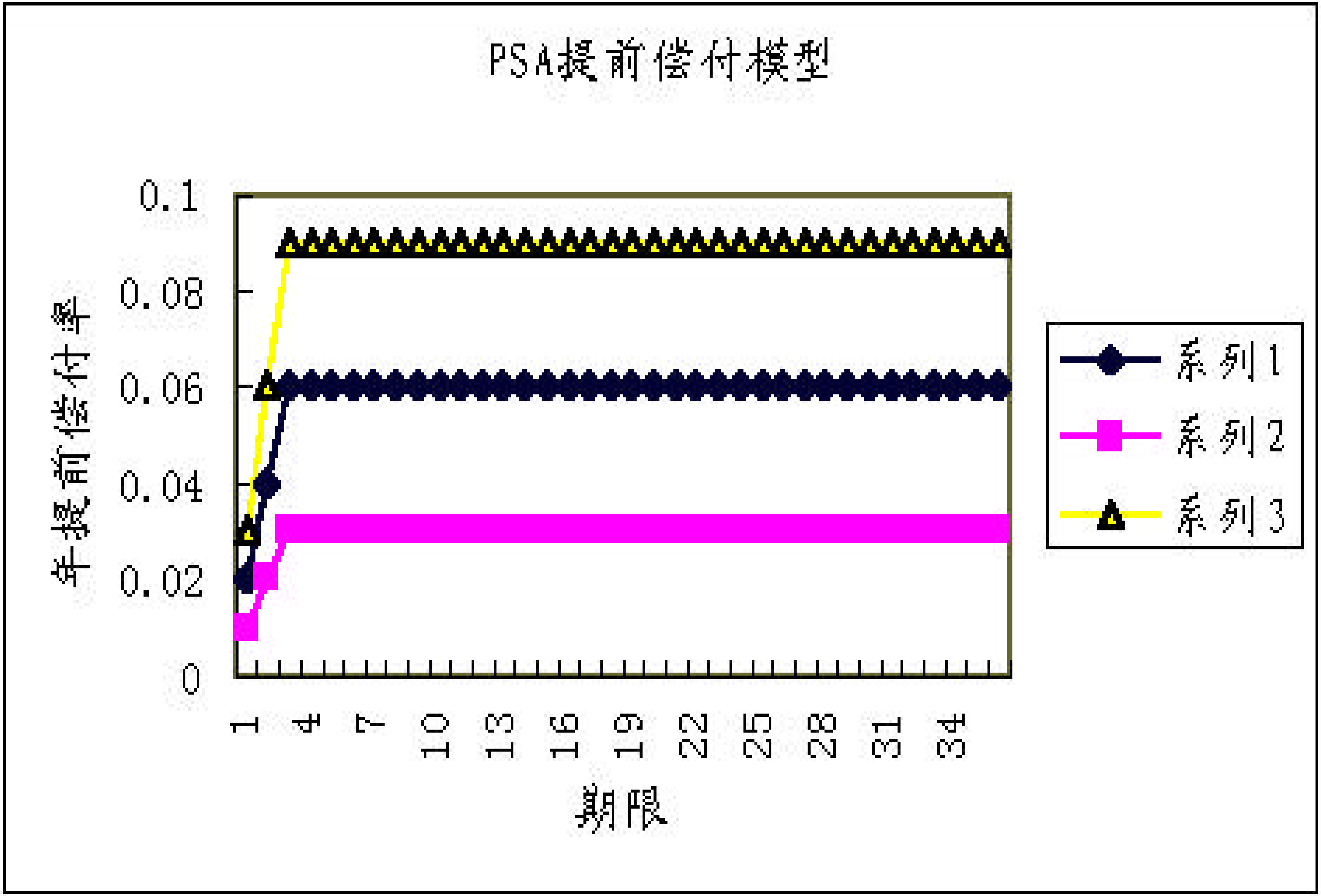
$$SMM_t = 1 - (1 - CPR_t)^{\frac{1}{12}}$$

即，在前面30个月内年度提前偿还比例逐渐(比例)增加，然后固定。

其它百分比的PSA的CPR增长速度是100%PSA的相应的百分比。比如，50%PSA意味着相应的CPR只有100%PSA的CPR的一半，而150%PSA意味着相应的CPR有100%PSA的CPR的1.5倍。

具体变化模式参见下图。

注☞ 其中系列1是标准PSA模式，系列2是标准模式整体降低50%，系列3是标准模式整体抬高50%


PSA提前偿付模型
年提前偿付率
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
1
4
7
10
13
16
19
22
25
28
31
34
期限
系列1
系列2
系列3

常数CPR_t（SMM_t）模式：

假设提前支付率为常数，从而有

$$1-CPR=(1-SMM)^{12}$$

或

$$SMM=1-(1-CPR)^{\frac{1}{12}}$$

从而对任何$n\geq 1$，有

$$Q_n=Q_0(1-SMM)^n=(1-SMM)^n=(1-CPR)^{\frac{n}{12}}$$

常数CPR_t（SMM_t）模式下的现金流分析

I_t和P_t——分别表示不存在提前偿还的情形第 t 个月的计划利息和本金

$\hat{R}_t$和$\hat{P}_t$——分别表示有提前偿还的情形第 t 个月的实际偿还额(实际发生现金流)和本金支付额

设月实利率为 j（由证券的息票率决定）

则按照上述定义有以下的递推算法

$t=0$时，

$$\hat{B}_0 = B_0 = L$$

$t=1$时，

正常支付为 $R_1=\dfrac{\hat{B}_0}{a_{\overline{n|}}}$，其中利息支付为 $I_1=j\times\hat{B}_0$，

本金支付为 $P_1=R_1-I_1$，末结本金余额为 $B_1=\hat{B}_0-P_1$

提前支付为

$$\begin{aligned}PR_1&=(1-Q_1)B_1\\&=(1-(1-SMM)^1)B_1\\&=SMM*B_1\end{aligned}$$

从而在不考虑转递手续费用下现金流应为：

$$\hat{R}_1=R_1+PR_1$$

由此可得

$$\hat{B}_1 = (1+j)\times\hat{B}_0 - \hat{R}_1 = \hat{B}_0 - \hat{P}_1 = \hat{B}_0 - P_1 - PR_1$$

对一般的t（$1\le t\le n$），$\hat{B}_{t-1}$已知，有

$$R_t = \frac{\hat{B}_{t-1}}{a_{\overline{n-(t+1)}|}} \quad , \quad I_t = j\times\hat{B}_{t-1} ,$$

$$P_t = R_t - I_t \quad , \quad B_t = \hat{B}_{t-1} - P_t$$

$$PR_t = (1-Q_t)B_t = (1-(1-SMM)^t)B_t$$

从而在不考虑转递手续费用下现金流应为：

$$\hat{R}_t = R_t + PR_t$$

由此可得

$$\hat{B}_t = (1+j)\times\hat{B}_{t-1} - \hat{R}_t = \hat{B}_{t-1} - \hat{P}_t = \hat{B}_{t-1} - P_t - PR_t$$

例：五百万元抵押贷款的资产池转递证券，分析提前偿还的现金流模式和对贷款余额的影响。

考虑如下模式：30 年，年名利率 9%，月实际利率 0.75%，月度提前偿还比例（SMM_t）为 0.5%。

具体现金流结果见下表——30 年贷款提前偿付情形的前 30 个月的现金流和余额情况

月份	现金流	提前偿还	计划偿还额	计划本金	计划利息	余额
0	0	0	0	0	0	5,000,000
1	65217.48	24986.34	40231.13	2731.13	37500.00	4,972,283
2	64877.70	24847.72	40029.98	2737.86	37292.12	4,944,697
3	64539.59	24709.76	39829.83	2744.60	37085.23	4,917,243
4	64203.13	24572.46	39630.68	2751.36	36879.32	4,889,919
5	63868.33	24435.80	39432.52	2758.13	36674.39	4,862,725
6	63535.16	24299.80	39235.36	2764.92	36470.44	4,835,660
7	63203.63	24164.44	39039.18	2771.73	36267.45	4,808,724
8	62873.71	24029.73	38843.99	2778.56	36065.43	4,781,916
9	62545.42	23895.65	38649.77	2785.40	35864.37	4,755,235
10	62218.73	23762.21	38456.52	2792.26	35664.26	4,728,680
11	61893.64	23629.40	38264.24	2799.14	35465.10	4,702,252
12	61570.14	23497.23	38072.91	2806.03	35266.89	4,675,948
13	61248.23	23365.68	37882.55	2812.94	35069.61	4,649,770
14	60927.89	23234.75	37693.14	2819.87	34873.27	4,623,715

15	60609.11	23104.44	37504.67	2826.81	34677.86	4,597,784
16	60291.90	22974.75	37317.15	2833.77	34483.38	4,571,975
17	59976.24	22845.67	37130.56	2840.75	34289.82	4,546,289
18	59662.12	22717.21	36944.91	2847.74	34097.17	4,520,724
19	59349.53	22589.35	36760.19	2854.76	33905.43	4,495,280
20	59038.47	22462.09	36576.38	2861.79	33714.60	4,469,956
21	58728.94	22335.44	36393.50	2868.83	33524.67	4,444,752
22	58420.91	22209.38	36211.54	2875.90	33335.64	4,419,666
23	58114.39	22083.92	36030.48	2882.98	33147.5	4,394,700
24	57809.37	21959.05	35850.33	2890.08	32960.25	4,369,850
25	57505.84	21834.77	35671.07	2897.20	32773.88	4,345,118
26	57203.79	21711.07	35492.72	2904.33	32588.39	4,320,503
27	56903.21	21587.96	35315.25	2911.48	32403.77	4,296,004
28	56604.10	21465.42	35138.68	2918.65	32220.03	4,271,620
29	56306.45	21343.47	34962.98	2925.84	32037.15	4,247,350
30	56010.26	21222.09	34788.17	2933.04	31855.13	4,223,195

分析：在贷款偿还期的前段时间，利息偿还比例很高，本金偿还速度很慢，即使有提前偿还，第 30 个月的月底余额仍然为四百二十万左右。

如果其他条件不变，考虑贷款期限为 15 年，则现金流和余额情形如下表所示——15 年贷款提前偿付情形的前 30 个月的现金流和余额情况

月份	现金流	计划本金	提前偿还	计划利息	计划偿还额	余额
0	0	0	0	0	0	5,000,000
1	75647.26	13213.33	24933.93	37500.00	50713.33	4,961,853
2	75202.80	13245.87	24743.03	37213.90	50459.76	4,923,864
3	74760.39	13278.48	24552.93	36928.98	50207.46	4,886,032
4	74320.03	13311.18	24363.61	36645.24	49956.43	4,848,358
5	73881.71	13343.96	24175.07	36362.68	49706.64	4,810,839
6	73445.42	13376.82	23987.31	36081.29	49458.11	4,773,474
7	73011.14	13409.76	23800.32	35801.06	49210.82	4,736,264
8	72578.87	13442.78	23614.11	35521.98	48964.77	4,699,207
9	72148.60	13475.89	23428.66	35244.06	48719.94	4,662,303
10	71720.31	13509.07	23243.97	34967.27	48476.34	4,625,550
11	71294.00	13542.34	23060.04	34691.62	48233.96	4,588,948
12	70869.65	13575.68	22876.86	34417.11	47992.79	4,552,495
13	70447.26	13609.11	22694.43	34143.71	47752.83	4,516,191
14	70026.81	13642.63	22512.74	33871.44	47514.06	4,480,036
15	69608.29	13676.22	22331.80	33600.27	47276.49	4,444,028

16	69191.70	13709.90	22151.59	33330.21	47040.11	4,408,167
17	68777.02	13743.66	21972.11	33061.25	46804.91	4,372,451
18	68364.25	13777.5	21793.37	32793.38	46570.89	4,336,880
19	67953.37	13811.43	21615.34	32526.60	46338.03	4,301,453
20	67544.38	13845.44	21438.04	32260.90	46106.34	4,266,170
21	67137.26	13879.54	21261.45	31996.27	45875.81	4,231,029
22	66732.00	13913.71	21085.57	31732.72	45646.43	4,196,029
23	66328.60	13947.98	20910.41	31470.22	45418.20	4,161,171
24	65927.05	13982.32	20735.94	31208.78	45191.11	4,126,453
25	65527.33	14016.76	20562.18	30948.40	44965.15	4,091,874
26	65129.44	14051.27	20389.11	30689.05	44740.33	4,057,433
27	64733.36	14085.87	20216.74	30430.75	44516.62	4,023,131
28	64339.09	14120.56	20045.05	30173.48	44294.04	3,988,965
29	63946.62	14155.33	19874.05	29917.24	44072.57	3,954,936
30	63555.94	14190.19	19703.73	29662.02	43852.21	3,921,042

分析：贷款期限的缩短，使得利息偿还比例降低，本金偿还速度加快，因此，提前偿还的作用相对降低，30 个月底的余额为三百九十万左右。

§6.2 固定资产折旧分析

固定资产是指可供长期使用，并在其使用过程中保持原有物质形态的劳动资料和生产资料，一般使用寿命较长，例如：厂房、设备、不动产和运输工具等。

记号：

n——计算期间的利息转换次数（通常是固定资产的使用寿命）

A——资产的起始价值（通常是最初的买价）

S——资产在计算结束时的残值（S 可以为负数或零！）

R——资产在扣除支出后的定期收益

B_t——在时刻 t 投资者账面上该资产的账面价值

$(t=0, 1, 2, ..., n)$

D_t——从时刻 t-1 到时刻 t 的折旧费 $(t=1, 2, ..., n)$

i——资产在每个利息换算期内的预期收益率

基本关系式：

$$B_0 = A$$

$$D_t = B_{t-1} - B_t$$

$$B_t = A - \sum_{r=1}^{t} D_r = S + \sum_{r=t+1}^{n} D_r$$

$$B_n = S$$

当$A<S$时，称为“增值资产”，例如不动产等

当$A>S$时，称为“贬值资产”，例如机器设备等

当$A=S$时，资产即不升值也不贬值，从而该资产在每个时刻的价值均为A，折旧费为零，且有

$$i = R/A$$

以下考虑$A>S$的情形，即整个过程为：初始投入A，定期回报R，最终一次性“收回” S。

在分析整个过程时，除了从会计角度考虑外，税收因素也是非常重要的一点。

四种常见的计算折旧费和账面价值的方法

偿债基金法或复利方法

将回报R分解为两个部分：

1）原始资产价值A的自然增长（考虑通胀因素等）部分，可以用iA表示

2）剩余部分，它的数值恰好可以用于建立累积金额为$A-S$ 的偿债基金，以补偿折旧造成的损失

如果偿债基金的利率用j表示，则有

$$R = iA + \frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}$$

即有

$$A = \frac{Ra_{\overline{n}|j} + Sv^n}{1+(i-j)a_{\overline{n}|j}}, \quad v = (1+j)^{-1}$$

如果$i=j$，上式变为：

$$A = Ra_{\overline{n}|i} + Sv^n, \quad v = (1+i)^{-1}$$

注☞ 若记$A=P$，$R=Fr$，$S=C$，则上式与债券价格的计算公式相同。

时刻 t（$1 \le t \le n$）的账面价值

= 原始价值－已累积的偿债基金值

$$B_t = A - \frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}} s_{\overline{t}|j} = S + \frac{A-S}{a_{\overline{n}|j}} a_{\overline{n-t}|j}$$

时刻t（$1 \le t \le n$）的折旧费

= **时刻t的账面价值—时刻 t-1 的账面价值**

$$D_t = [\frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}](s_{\overline{t}|j} - s_{\overline{t-1}|j}) = [\frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}](1+j)^{t-1}$$

注☞ **折旧费用随着资产使用时间的推移而增加。这种计算在某些情况下是合适的，例如：写字楼的折旧费在前几年比较低，在使用的后期折旧费增加的很快。**

直线法（straight line method）

资产的全部贬值量$A-S$按时间平均得到每个时刻的折旧费，即在时刻t（$1\le t\le n$）有

$$D_t=\frac{A-S}{n}$$

从而账面价值为时间t的线性函数，即在时刻t（$1\le t\le n$）有

$$B_t= A-\frac{A-S}{n}t = [1-\frac{t}{n}]A+\frac{t}{n}S$$

注☞ 直线法的折旧速度恒定

余额递减法（declining balance method）

每段时间的折旧费按当时的资产账面价值的某个比例d计算，即在时刻t（$1\le t\le n$）有

$$D_t=d\times B_{t-1}$$

从而在时刻t（$1\le t\le n$）的帐面价值为

$$B_t=(1-d)B_{t-1}=(1-d)^t A$$

由此可得

$$D_t=d(1-d)^{t-1}A$$

比例d的确定

在A，S (>0)，n已知时，由

$$B_n = (1-d)^n A = S$$

可得

$$d = 1 - \left(\frac{S}{A}\right)^{\frac{1}{n}}$$

实际中折旧因子d常常取为 $1/n$ 的倍数（125%、150%或 200%等），即

$$d' = \frac{k}{n}, \qquad k = 1.25, 1.5, 2, \ldots$$

注☞ 当$k=2$时称为双倍余额递减法

注☞ 到最后一个时刻，账面价值可能会不等于S，可以通过对D_n的适当调整来解决。

注☞ 如果残值较大，则有可能到第年之前的若干年，折旧已经计提完毕，只剩零头，需要人为计提一次或多次。

年限总和折旧法（sum of the years' digits method）

将固定资产的原始价值扣除残值后的余额，按逐年递减（折旧比例为固定资产的剩余使用年限与资产寿命年限总和之比）计算折旧费的方法。

类似于"78 法则"，利用数字和 $S_r = 1 + 2 + \cdots + r$（$r \geq 1$）作为加权因子，即在时刻 t（$1 \leq t \leq n$）有

$$D_t = \left[\frac{n-t+1}{S_n}\right](A - S)$$

从而在时刻 t（$1 \leq t \leq n$）的帐面价值为

$$B_t = S + \frac{S_{n-t}}{S_n}(A - S)$$

各次的折旧分别为:

$$D_1 = \frac{n}{S_n} \times (A - S)$$

$$D_2 = \frac{n-1}{S_n} \times (A - S)$$

$$\cdots\cdots$$

$$D_n = \frac{1}{S_n} \times (A - S)$$

注☞ 在实际中加速折旧的方法包括缩短折旧年限和加速折旧法（即前期多折旧，后期少折旧），后者通常即为双倍余额递减法以及年限总和法。

折旧法与应纳税额

❖ 运用不同的折旧方法所计算出来的折旧额在量上不一致，分摊到各期的固定资产成本也存在差异，进而影响各期营业成本和利润。

❖ 从应纳税额的现值来看，运用双倍余额递减法计算折旧时，税额最少，年限总和法次之，而运用直线法计算折旧时，税额最多。

❖ 加速折旧法（即双倍余额递减法、年限总和法）在最初的年份内提取了更多的折旧，冲减的税基较多，使应纳税额减少，从而总的应纳税额的现值较低。

依据现行的《企业财务通则》规定，在我国只有那些在国民经济中具有重要地位、技术进步快的电子生产企业、船舶工业和船舶运输企业、生产“母机”的机械企业、飞机制造企业、汽车制造和汽车运输企业、化工生产企业、医药生产企业以及其他经财政部批准的企业，其机器设备可以采用加速折旧法。

例：某企业固定资产原值为 180,000 元，预计残值为 10,000 元使用年限为 5 年。5 年内企业未扣除折旧的利润如下表所示。

年 限	未扣除折旧利润（元）
第一年	100,000
第二年	90,000
第三年	120,00
第四年	80,000
第五年	76,000
合 计	466,000

假设该企业适用 33％的比例所得税率，试分析该企业在采用不同的折旧方法（直线法或者加速折旧法）下缴纳所得税的情况。

1）直线法

年折旧额

＝(固定资产原值－估计残值)／估计使用年限

＝(180,000－10,000)／5

＝34,000（元）

从而有

第一年利润额＝100,000—34,000＝66,000（元）

应纳所得税＝66,000×33%＝21,780(元)

第二年利润额＝90,000-34,000＝56,000(元)

应纳税得税＝56,000×33%＝18,480(元)

第三年利润额＝120,000-34,000＝86,000(元)
应纳所得税＝86,000×33%＝28,380(元)

第四年利润额＝80,000-34,000＝46,000(元)
应纳所得税＝46,000×33%＝15,180(元)

第五年利润额＝76,000-34,000＝42,000(元)
应纳所得税＝42,000×33%＝13,860(元)

五年累计应纳所得税额
＝21,780+18,480+28,380+15,180+13,860
＝97,680(元)

2）双倍余额递减法

会计制度规定，在计算最后两年折旧额时，应将原采用的双倍余额递减法改为用当年年初的固定资产账面净值减去估计残值，将其余额在使用的年限中平均摊销。

双倍直线折旧率＝2×1/5×100％＝40％

第一年折旧额＝180,000×40％＝72,000(元)

利润额＝10,000-72,000＝28,000(元)

应纳所得税＝28,000×33%＝9,240(元)

第二年折旧额＝(180,000-72,000)×40%

＝43,200(元)

利润额＝90,000-43,200＝46,800(元)

应纳所得税＝46,800×33%＝15,444(元)

第三年折旧额＝(180,000-72,000-43,200)×40%

＝25,920(元)

利润额＝120,000-25,920＝94,080(元)

应纳所得税＝94,080×33%＝31,046.4(元)

第四年后,使用直线法计算折旧额

第四、第五年的折旧额
＝（180,000-72,000-43,200-25,920-10,000）/2
＝14，440(元)

第四年利润额＝80,000-14,440＝65,560(元)
应纳所得税＝65,560×33%＝21,634.8(元)

第五年利润额＝76,000-14,440＝61,560(元)
应纳所得税＝61,560×33%＝20,314.8(元)

五年累计应纳所得税
＝9,240+15,444+31,046.4+21,634.8+20,314.8
＝97,680(元)

3）年限总和法

每年折旧额

＝（可使用年数/使用年数总和）

×(固定资产原值－预计残值)

本例中,年数总和为 1+2+3+4+5=15

第一年折旧额＝5/15×(180,000-10,000)

＝56,666(元)

利润额＝100,000－56,666＝43,334(元)

应纳所得税＝43,334×33%＝14,300.2(元)

第二年折旧额＝4/15×(180,000-10,000)

＝45,333(元)

利润额＝90,000－45,334＝44,667(元)
应纳所得税＝44,667×33%＝14,740.1(元)

第三年折旧额＝3/15×(180,000-10,000)
＝34,000(元)

利润额＝120,000－34,000＝86,000(元)
应纳所得税＝86,000×33%＝28,380(元)

第四年折旧额＝2/15×(180,000-10,000)
＝22,666(元)

利润额＝80,000－22,666＝57,334(元)
应纳所得税＝57,334×33%＝18,920.2(元)

第五年折旧额＝1/15×(180,000-10,000)

＝11,333(元)

利润额＝76,000－11,334＝64,667(元)

应纳所得税＝64,667×33%＝21,340.1(元)

五年累计应纳所得税

＝

14,300.2+14,739.6+28,380+18,920+21,340

＝97680(元)

注☞ 下表中假设以利率$i=5\%$计算现值

不同折旧方法下的应纳税额（单位:元）

年 限	直线法	双倍余额递减法	年数总和法
第一年	21,780	9,240	14,300.2
第二年	18,480	15,444	14,740.1
第三年	28,380	31,046.4	28,380
第四年	15,180	21,634.8	18,920.2
第五年	13,860	20,314.8	21,340.1
总 计	97,680	97,680	97,680.6
现 值	85,369	83,343	83,791

例：某种机器的原始买价为 1 万元，使用寿命 5 年，残值 1 千元。

分别用四种方法计算各年的折旧费和账面价值：

1）j=0.05 的偿债基金方法

2）直线法

3）余额递减法（分别用d 和d '= 2/5 = 0.4 计算）

4）年限总和折旧法

解： $A=10,000 \quad S=1,000 \quad n=5$

1) $$\frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}}=\frac{10,000-1,000}{s_{\overline{5}|.05}} = \mathbf{1628.775}$$

2) $\dfrac{A-S}{n}$ = 1800

3) d $=1-(0.1)^{\frac{1}{5}}$ = 1- 0.631 = 0.369

4) S_5 = 15

注☞ 总的折旧额为 9,000 元

注☞ 方法 3'中的最后一次折旧额理论上应为

1296×0.4=518.40（元）

但实际人为调整为折旧 296 元

四种方法计算折旧费用和账面价值的结果

	方法 1		方法 2		方法 3		方法 3 '		方法 4	
时间t	D_t	B_t	D_t	B_t	D_t	B_t	D_t	B_t	D_t	B_t
0		10,000		10,000		10,000		10,000		10,000
1	1,629	8,371	1,800	8,200	3,690	6,310	4,000	6,000	3,000	7,000
2	1,710	6,661	1,800	6,400	2,328	3,982	2,400	3,600	2,400	4,600
3	1,796	4,865	1,800	4,600	1,470	2,512	1,440	2,160	1,800	2,800
4	1,886	2,979	1,800	2,800	927	1,585	864	1,296	1,200	1,600
5	1,979	1,000	1,800	1,000	585	1,000	296	1,000	600	1,000

§6.3 资本化成本（capitalized cost）计算

资本化成本——固定资产的投资成本

固定资产的投资——买入固定资产的原始投资在每年的**利息损失**、**折旧费用**和**维护保养费用**

记号：

定期费用（periodic charge）——单位资产在单位时间内以上三项费用之和

H——每期的定期费用（如一年）

M——每期的维护保养费用

A, S, i, j, n——与上一节中的定义相同

每期的应计利息、折旧费用和保养费用构成的费用现金流可表示为

$$H = Ai + \frac{A-S}{s_{\overline{n}|j}} + M$$

固定资产的资本化成本 ＝ 所有定期费用的现值之和

即：

$$K = Ha_{\overline{\infty}|i} = \frac{H}{i} = A + \frac{A-S}{is_{\overline{n}|j}} + \frac{M}{i}$$

注☞ 用永久年金的现值，是表示单位资产永久运转下去的现值投入（以一定的利率计算的）。

不同固定资产投资成本的比较

- 比较定期费
- 比较资本化成本

例：已知机器 A 售价为十万元，年保养费用 2500 元，25 年的使用寿命，残值为 2000 元；机器 B 年保养费用 5000 元，20 年的使用寿命，残值为零；机器 B 的产量是机器 A 的 3 倍。如果年利率 5%，且两种投资等价，计算 B 的可接受价格。

注☞ 当不同资产在每期的产出量不同时，用U_k表示第k个资产单位时间内的产出量，则两种资产每期单位成本等价的公式为

$$\frac{A_1 i + \dfrac{A_1 - S_1}{s_{\overline{n_1}|j}} + M_1}{U_1} = \frac{A_2 i + \dfrac{A_2 - S_2}{s_{\overline{n_2}|j}} + M_2}{U_2}$$

如果有$i = j$，则可以化简为

$$\frac{\dfrac{A_1}{a_{\overline{n_1}|}} - \dfrac{S_1}{s_{\overline{n_1}|}} + M_1}{U_1} = \frac{\dfrac{A_2}{a_{\overline{n_2}|}} - \dfrac{S_2}{s_{\overline{n_2}|}} + M_2}{U_2}$$

解：资本化成本的每期等价费用为

$$\frac{\dfrac{100{,}000}{a_{\overline{25|}}}-\dfrac{2000}{s_{\overline{25|}}}+2500}{1}=\frac{\dfrac{A_2}{a_{\overline{20|}}}+5000}{3}$$

从而可以得到

$$A_2=12.4622\{3[100{,}000\times 0.070952$$
$$-2{,}000\times 0.020952+2500]-5{,}000\}$$
$$=294{,}854$$

即：机器 B 的可接受价格近似为二十九万元，接近机器 A 的价格的 3 倍。

Note：机器 A 和机器 B 的比较

	价格	每年维护费用	期限	残值	产量
机器 A	100,000	2500	25	2000	1
机器 B	294,854	5000	20	0	3

注意：机器 B 将产量提高 2 倍的代价是，初始投资增加近 2 倍、每期维护费用增加 1 倍和期限缩短 20%

例：某种零件的单位价格为 10 元，有效期 14 年，残值为零，年利率 4%。现希望将使用寿命延长八年，且年保养费用不变，问：可接受的价格上涨比例为多少？

解：已知 $A_1 = 10$； $S_1 = S_2 = 0$； $M_1 = M_2$； $n_1 = 14$，$n_2 = 22$

假设有 $U_1 = U_2$； $j = i$

设 $A_2 = 10 + X$，则价值方程为

$$\frac{10}{a_{\overline{14|}.04}} = \frac{10 + X}{a_{\overline{22|}.04}}$$

由此可得

$$X=10\left[\frac{a_{\overline{22}|.04}}{a_{\overline{14}|.04}}-1\right]=3.68$$

即：价格上涨 36.8%

§6.4 实例分析

卖空（short sale）

有些证券市场允许投资者在认为某种证券的价格将要下跌时先卖后买，即通过卖空方式进行投资

例：股票市场看涨或看跌时的操作策略

看涨®借钱®买股票®卖股票®还钱®收益

看跌®借股票®卖股票®买股票®还股票®收益

卖空的收益率计算是比较复杂的，因为这种业务的操作受许多因素的影响，而且还要考虑计算的方法。

例：某人以 10 元的价格将某种股票空头卖出 100 股，在一年后，以每股 8 元的价格将所有 100 股买回，净收入为 200 元。问：应如何计算收益率？

分析：

如果直接用价值方程计算，则有

$$1000\,(1+i) = 800$$

由此解得 $i = -20\%$，结果不合理。

如果将时间换一个方向，则价值方程变为

$$800\,(1+i) = 1000$$

由此解得 $i=25\%$，结果仍不合理，因为这个结果表示：800 元的投入将产生的收益，而在卖空情况下，卖空者并没有任何投资。

卖空的保证金制度

美国相关法规要求：卖空者在进行卖空业务时，必须在其证券账户中存入一定的**保证金**（deposit），这笔保证金在空头被完全补平之前是不能动用的。

注☞ **押金**（margin）金额的大小是以卖空售价的一定比例给出的，比如 50%。

押金比例可以由政府随时调整：

❖ 如果政府认为股票交易活动和交易价格因为对借贷业务的放松而过分活跃时，它就会提高保证金的比例，从而减少购买股票的借贷资金；

❖ 如果中央政府想把刺激市场作为其货币政策的一部分，它就会减少这种保证金的比例要求。

续前例：设保证金比例为 50%

分析：

（1）在进行卖空业务之初，卖空者必须在户头上存入 500 元，因此，200 元的空头收益可以被看做是 500 元投入的结果，收益率为 40%

（2）保证金户头有利息收入。设利率为 8%，则总收益为

$$200 + 500\times 8\% = 240\text{（元）}$$

相应的收益率为 48%

（3）遇到卖空的股票分红，卖空者需要向股票的借出者支付红利。设红利为 60 元，则卖空的净收入为

$$240 - 60 = 180\text{（元）}$$

相应的收益率为 36%

金融衍生产品（derivatives）简介

金融衍生产品——从标的资产（underlying assets）派生出来的金融工具

金融衍生产品主要有以下三种分类方法：

- 根据产品形态，分为远期、期货、期权、掉期
- 根据原生资产，分为股票、利率、汇率、商品
- 根据交易方法，分为场内交易和场外交易

注☞ 交易持仓量的大小为

远期 ＞ 掉期 ＞ 期货 ＞ 期权

掉期 (swap)——交易双方约定在未来某一时期相互交换某种资产

远期 (forward)——交易双方约定在未来某一时期以指定的价格买入或卖出某种资产

期货 (futures)——标准化的、可以在市场中公开交易的远期合约

期权 (option)——期权的买方向卖方支付一定数额的权力金后可获得的一种选择权，在一定时间以一定价格出售或购入一定数量的标的物的权力

例：金融期权

其拥有者具有的某种未来权益（在将来的某个时刻以事先预定的价格买卖某种金融产品）的凭证。

期权产品中的商定履约价格被称为“协议价”（exercise price）或“敲定价”（striking price）

注☞ 期权是赋予其拥有者的一种权力，而不是必须行使的。

从广义上讲，金融期权可以指金融产品中含有的任何选择权，例如：可赎回债券中的早赎权力，可转换债券中的转换权力等。

根据期权交易的买卖类型可分为：

买入期权 / 看涨期权（call option）——可以在指定日期以协议价格买入一定量的金融产品

卖出期权 / 看跌期权（put option）——可以在指定日期以协议价格卖出一定量的金融产品

当投资者认为某种金融产品的价格将要上涨时，就可以购买这种金融产品的买入期权，或者是出售这种金融产品的卖出期权；相反地，如果认为价格将要下跌，则采取相反的操作。

根据期权允许的交易时间又可分为：

欧式期权（European option）——期权的买卖日期只能是事先指定的日期

美式期权（American option）——期权的买卖日期可以在某个指定日期之前的任何日期进行买卖

注☞ 前者如目前国内的可赎回债券，后者如可转债。

买卖期权的两种动机：

1）出于投机，为赚取高额利润

——例如：对某种证券买入期权的协议价为 45 元；如果市场到期的交易价格为 50 元，则该买入期权至少值 5 元；如果市场到期的交易价格增为 55 元（比前面的价格上升 10%），则该买入期权至少值 10 元（比前面的价值上升 100%）。

也就是说，期权价值的涨幅将远远大于证券本身价格的涨幅，因而有可能有更大的收益。这种作用被称为“杠杆原理”（leverage）。

2）出于套利保值，为减少投资风险

——因为期权的使用不是必须的，从而期权可作为投资策略的保险方面，有效防范投资中的巨大风险的发生或锁住投资收益。

例：期权的定价

任何金融产品的价格都是由该产品所产生的现金流决定的。期权产品的现金流是建立在标的资产的价格或价值的基础上的。

股票的欧式看涨期权：

股票 A 的当前价格为每股 10 元，投资者认为该股

票在今后一段时间（比如一个月）可能会上涨，但是又不愿冒风险直接大量购买该股票，从而选择买入该股票的看涨期权。

考虑执行价格为每股 11 元，这里假定投资期间为一个月。

股票 A 的这个看涨期权表示：若一个月后股票 A 的价格高过 11 元，则期权持有人将执行该期权，

由此发生的现金流 ＝ 股票 A 的实际价格－11

若一个月后股票 A 的价格没有超过 11 元，则期权持有人将自动放弃该期权，

由此发生的现金流 ＝0

期权的价格由以下几个方面决定：

期权合同标识的金融产品的价格（current price），一般用S表示当前价格，S_T表示期权合同标识的金融产品在时刻T的市场价格；

期权合同对这种金融产品指定的未来执行价格（exercise price / striking price），一般用X表示；

期权合同的有效期限，一般用T表示。

用C表示看涨期权的价格，P表示看跌期权的价格，则看涨期权和看跌期权在时刻T的价值或现金流（pay-off）分别为 $\max(0, S_T - X)$ 和 $\max(0, X - S_T)$

按照现金流定价方法，期权价格可以表述为

$$C = v^n E[\max(0, S_T - X)]$$

$$P = v^n E[\max(0, X - S_T)]$$

其中v是对风险利率的贴现因子，数学期望 E 是用给定的概率分布进行计算的。

注☞ 期权是一种重要的保持市场效率的金融工具。

其它实例分析

例：某业务的现金流为：当前存款 200 元，在第一年底取款 1000 元，在第二年底存款 1000 元。

1）计算这个交易的两个非负收益率；

2）计算 APR。

解：

1）计算年收益率i：

$$(1+i)^2-5(1+i)+5=0 \Rightarrow \ i=2.618 \text{ 或 } 0.38197$$

2）APR 计算：

$$L=1000, \quad K=200+1000-1000=200$$

按照两年投资期计算：

$$\frac{K+L}{n}a_{\overline{2}|\text{ APR}}=L \Rightarrow 600a_{\overline{2}|\text{ APR}}=1000$$

$$\Rightarrow APR\text{不存在}$$

按照一年投资期计算：

$$\frac{K+L}{1}a_{\overline{1}|APR}=L\text{，}1200a_{\overline{1}|APR}=1000\text{，}$$

则：$APR=20\%$

结论：在这种情况下（现金流的流入流出改向一次以上），很难用一个收益率或年百分率表示投资的收益。

例：某企业计划发行 20 年期兑现值为一百万元的零息票债券，按年利率 9%复利计算。企业希望将利息部分用直线法平均摊入每年。但是，税务部门坚持用精算法确定每年的利息。

问：

1）这 20 年间，两种方法的利息分别为多少？

2）在哪一年，两种方法的结果最接近？

注☞ 所得税 =（利润—利息负债）×税率

注☞ 对企业来说，直线法比精算法有利

解：该企业的零息票债券发行价格为

$$1,000,000\times(1+9\%)^{-20}=178,430.89$$

从而总的利息支出为

$$1{,}000{,}000 - 178{,}430.89 = 821{,}569.11$$

问题是：企业如何将这笔利息负债摊到每年？

1） 企业的利息分配方法（直线法）：

$$\text{每年利息} = \frac{821{,}569.11}{20} = 41{,}078.46$$

税务的利息分配方法（精算法）：

第 t 年利息 = 上期帐面末结贷款余额×9%

$$= 178{,}430.89 \times (1.09)^{t-1} \times 0.09$$

变化范围为：$16{,}058.78 \sim 82{,}568.81$

2）设 t 使得

$$41078.46 = 178,430.89 \times (1.09)^{t-1} \times 0.09$$

即

$$(1.09)^{t-1} = 2.558$$

由此可以解出

$$t = 11.8989$$

第 11 年有利息差为

$$178,430.89 \times (1.09)^{10} \times 0.09 - 41078.46 = -3061.49$$

第 12 年有利息差为

$$178,430.89 \times (1.09)^{11} \times 0.09 - 41078.46 = 360.04$$

从而两种方法计算利息在第 12 年最接近。

例：在银行业务有一类豁免审批限额贷款。即：在一定限额以下的贷款可以不必审批。已知这种账户的年单利率 15%，银行在每月的最后一天和最后一次还贷的日期计算利息。

某账户在元月 15 日借款 1000 元，在 3 月 1 日借款 500 元。然后分别在 3 月到 7 月的每月 15 日还款 250 元。分别用上述的银行计息方法、“美国计息法”和“商人计息法”计算该账户为了在 8 月 15 日还清贷款，应该偿还的金额。

解：1) 银行计息方法的账户余额情况：

日期	1月31日	2月28日	3月31日	4月30日
余额	1006.57	1018.15	1285.64	1049.95
日期	5月31日	6月30日	7月31日	8月15日
余额	811.69	570.16	325.78	327.79

具体计算如下：

每日利率： $j = 15\% / 365 = 0.000410958$

设所有业务在当天不计利息，则有

1月15日： 1000 元

1月31日： $1000 \times (1 + 16j) = 1006.575342$

2月28日： $1006.575342 \times (1 + 28j) = 1018.157853$

3 月 31 日：

$$1018.157853\times(1+31j)+500\times(1+30j)-250\times(1+16j)$$

$$=1285.649433$$

4 月 30 日：

$$1285.649433\times(1+30j)-250\times(1+15j)$$

$$=1049.95881$$

5 月 31 日：

$$1049.95881\times(1+31j)-250\times(1+16j)$$

$$=811.691162$$

6 月 30 日：

$$811.691162\times(1+30j)-250\times(1+15j)$$

$$=570.1572174$$

7 月 31 日：

$$570.1572174\times(1+31j)-250\times(1+16j)$$

$$=325.7770285$$

8 月 15 日： $325.7770285\times(1+15j)=327.7852431$

从而 8 月 15 日应偿还 327.79 元。

2）“美国计息法” 的账户余额情况：

日期	$15/1$	$1/3$	$15/3$	$15/4$
余额	**1000.00**	**1518.49**	**1277.23**	**1043.50**
日期	$15/5$	$15/6$	$15/7$	$15/8$
余额	**806.37**	**566.64**	**323.63**	**327.75**

从而 8 月 15 日应偿还 327.75 元。

3) “商人计息法”:

$$1000(1+0.15\frac{212}{365})+500(1+0.15\frac{167}{365})$$

$$-250(1+0.15\frac{153}{365})-250(1+0.15\frac{122}{365})$$

$$-250(1+0.15\frac{92}{365})-250(1+0.15\frac{61}{365})$$

$$-250(1+0.15\frac{31}{365})$$

$$=324.28$$

从而 8 月 15 日应偿还 324 元。

例：假定在$t_0=0$时贷款L元，在$0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}$时分别还款A_1,A_2，…，A_{n-1}。如果$i>0$；$A_k>0$，k=1,2,…, n-1 且有：$\sum_k A_k<L$，记A_n为最后一次还款（在时刻t_n）的金额。

证明：由"美国计息法"计算的A_n大于由"商人计息法"计算的A_n。

注☞ 假设每一次还款均超过当期应还利息

证明：

1) “美国计息法”计算：

$$A_n^U = L\cdot\prod_{r=1}^{n}[1+(t_r-t_{r-1})i]-\sum_{k=1}^{n-1}A_k\prod_{r=k+1}^{n}[1+(t_r-t_{r-1})i]$$

2) “商人计息法”计算：

$$A_n^M = L\cdot[1+it_n]-\sum_{k=1}^{n-1}A_k[1+i(t_n-t_k)]$$

两者差为：

$$A_n^U - A_n^M$$

$$= L \cdot [\prod_{r=1}^{n}[1+(t_r - t_{r-1})i] - (1+it_n)]$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} A_k [\prod_{r=k+1}^{n}[1+(t_r - t_{r-1})i] - (1+i(t_n - t_k))]$$

$$\underset{(L>\sum_{k=1}^{n-1}A_k)}{>} \sum_{k=1}^{n-1} A_k [\prod_{r=1}^{n}[1+(t_r - t_{r-1})i] - \prod_{r=k+1}^{n}[1+(t_r - t_{r-1})i] - it_k]$$

$$\geq 0$$

注☞ 上式推导用到关系式

$$\prod_{r=1}^{n}[1+(t_r-t_{r-1})i]-\prod_{r=k+1}^{n}[1+(t_r-t_{r-1})i]-it_k$$

$$=\prod_{r=k+1}^{n}[1+(t_r-t_{r-1})i]\{\prod_{r=1}^{k}[1+(t_r-t_{r-1})i]-1\}-it_k$$

$$>\prod_{r=1}^{k}[1+(t_r-t_{r-1})i]-1-it_k$$

$$\geq 1+\sum_{r=1}^{k}i(t_r-t_{r-1})-1-it_k=0$$