第九讲 子博弈精炼均衡应用

广东工业大学管理学院 张成科
020-87082461
zhangck@gdut.edu.cn

1 主要内容

本讲给出子博弈精炼纳什均衡的几个经济学应用案例, 以此为基础进一步探讨无限策略情形下的逆向归纳求解均衡方法.

- 斯坦克尔博格模型
- 工会与雇主模型
- 讨价还价模型

2 斯坦克尔博格模型

- 斯坦克尔伯格模型概述: Stackelberg, 1934.
  - 两个寡头企业, $i = 1, 2$, 皆以不变单位成本c生产同种产品.
  - 企业的行动是选择产量: q_1, q_2.
  - 企业行动有先后: 企业1先行动, 选择$q_1 \geq 0$; 企业2观察到q_1, 然后选择自己的产量$q_2 \geq 0$.
  - 市场逆需求函数: $p(Q) = a - Q = a - q_1 - q_2$.
  - 支付函数: $\pi_i(q_1, q_2) = q_i(p(Q) - c), \ i = 1, 2$.

☛ 逆向归纳法求解

☞ 先考虑企业2的行动选择. 给定领头企业的产量q_1, 尾随企业需选择q_2使得π_2最大化:

$$\max_{q_2\geq 0} \pi_2(q_1,q_2)=q_2(a-q_1-q_2-c)$$

得到反应函数:

$$s_2(q_1)=\frac{a-c-q_1}{2}$$

注意: 企业1的任意一个给定产量q_1都定义了企业2的一个单结信息集, 以该信息集起始的单人子博弈纳什均衡是$\frac{a-c-q_1}{2}$.

☞ 考察企业1的最优战略. 企业1坚信企业2的理性, 若自己选择q_1, 企业2将选择$s_2(q_1)$, 因此其支付最大化问题是

$$\max_{q_1 \geq 0} \quad q_1(a - q_1 - q_2 - c)$$
$$\text{s.t.} \quad q_2 = \frac{a - c - q_1}{2}$$

或者直接求解如下问题:

$$\max_{q_1 \geq 0} \ \pi_1(q_1, s_2(q_1)) = q_1(a - q_1 - s_2(q_1) - c)$$

解得:

$$q_1^* = \frac{a - c}{2}$$

企业1的最优产量必须具有前瞻性: 预计到企业2的最优反应.

☞ 代入求得企业2的最优产量:

$$q_2^* = s_2(q_1^*) = \frac{a-c}{4}$$

☞ 子博弈精炼纳什均衡要求在任何子博弈上都给出纳什均衡. 本例中企业2的信息集是无穷多个, 必须给出其任何决策结处的最优行动. 博弈的子博弈精炼纳什均衡是:

$$\left(\frac{a-c}{2}, s_2(q_1)\right)$$

子博弈精炼纳什均衡对应的支付是

$$\pi_1^* = \frac{(a-c)^2}{8}, \quad \pi_2^* = \frac{(a-c)^2}{16}$$

- 斯坦克尔博格模型子博弈精炼纳什均衡图示—一个类似于生产者均衡的分析框架
  - 企业1的等利润曲线
    - 单调性: 对于企业1, 其利润函数为如下形式:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - q_1 - q_2 - c)$$

令$\pi_1(q_1, q_2) = \overline{\pi}$, 则得到一条等利润曲线, 该曲线表明了厂商1利润不变条件下q_2与q_1之间的对应关系:

$$\overline{\pi} = q_1(a - q_1 - q_2 - c)$$
$$q_2 = a - c - q_1 - \frac{\overline{\pi}}{q_1}$$

不难看出, 该函数在区间$(0, \sqrt{\overline{\pi}})$上单调递增, 在区间$(\sqrt{\overline{\pi}}, \infty)$上单调递减.

✍ 等利润曲线与反应函数关系: 等利润曲线的最高点满足

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\pi}{q_1} \\
&= \frac{q_1(a - q_1 - q_2 - c)}{q_1} \\
&= a - q_1 - q_2 - c \\
q_1 &= \frac{a - c - q_2}{2}
\end{aligned}
$$

这表明, 完全信息静态条件下厂商1的反应函数要穿过等利润曲线最高点. 事实上, 一阶条件为0即利润最大化条件.

✍ 等利润曲线与反应函数关系: 等利润曲线的最高点满足

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\overline{\pi}}{q_1} \\
&= \frac{q_1(a-q_1-q_2-c)}{q_1} \\
&= a-q_1-q_2-c \\
q_1 &= \frac{a-c-q_2}{2}
\end{aligned}
$$

这表明, 完全信息静态条件下厂商1的反应函数要穿过等利润曲线最高点. 事实上, 一阶条件为0即利润最大化条件.

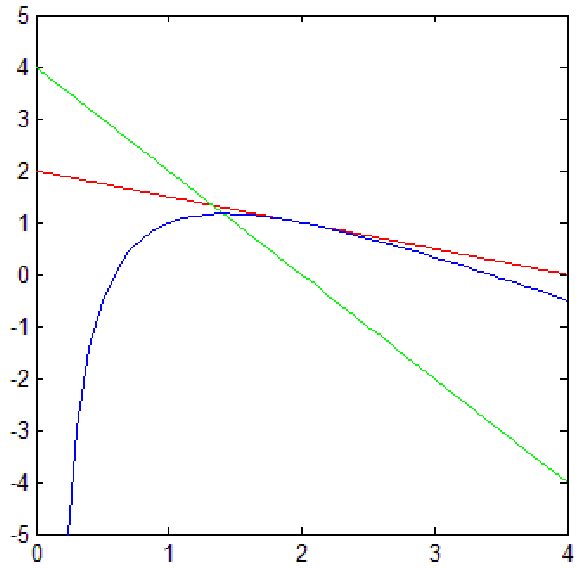
✍ 等利润曲线位置关系: 由于$q_2 = a-c-q_1-\frac{\overline{\pi}}{q_1}$, 所以等利润曲线越高, 则利润值$\pi$越小.

☞ 企业1的利润最大化问题

✍ 约束条件: 预见到企业2的反应, 或者说在企业2的反应函数下求解利润最大化问题.

✍ 相切条件: 最优问题相当于找一条位置最低的等利润曲线, 则必须满足相切条件.

☞ 示意图: 若取$a-c=4$, 上述结论如下图所示.



- 子博弈精炼纳什均衡结果分析
  - 帕累托有效性: 寡头竞争均衡结果不是有效的, 总产量依旧超过了整体最优产量.
  - 先行优势: 企业1与2成本函数一样, 但企业1由于率先行动而获得了相对较大的利润.

3 工会与雇主模型

- 模型概述. Leontief, 1946. 考察要素市场卖方垄断现象.
  - 两个参与人: 工会与雇主.
  - 行动: 工会决定工资率ω; 雇主决定就业水平L.
  - 行动顺序: 工会先行动; 雇主后行动.
  - 支付: 工会效用函数为$U(\omega, L)$, 满足$U_\omega > 0,\ U_L > 0$; 企业利润函数是$\pi(\omega, L) = R(L) - \omega L$, 满足$R' > 0,\ R'' < 0$.

☛ 子博弈精炼均衡的确定

☞ 先考虑雇主的最优反应. 给定ω, 雇主选择最优的就业水平$L^*(\omega)$使得利润最大化:

$$\max_{L>0} \quad \pi(\omega, L) = R(L) - \omega L$$

则有

$$R'(L) = \omega$$

由一阶条件得到雇主反应函数$L^*(\omega)$, 该函数单调递减: 就业水平随工资率提高而下降.

☞ 然后考虑工会最优工资率选择. 工会预见到雇主反应, 在此基础上考虑效用最大化问题:

$$\max_{\omega>0} \quad U(\omega, L)$$
$$\text{s.t.} \quad L = L^*(\omega)$$

一阶条件为

$$U_\omega + U_L L^*_\omega = 0 \rightarrow -\frac{U_\omega}{U_L} = L^*_\omega$$

即, 无差异曲线与雇主反应函数相切, 边际替代率等于雇主劳动需求曲线斜率. 从而确定了最优工资率.

☞ 对于给定的工资率ω^*, 雇主确定最优就业水平$L^* = L^*(\omega^*)$. 子博弈精炼纳什均衡就是$(\omega^*, L^*(\omega))$.

☛ 子博弈精炼均衡结果图示—一个标准的帕累托有效性分析框架

☞ 雇主的等利润曲线

✍ 单调性: 就企业而言, 其利润函数为如下形式:

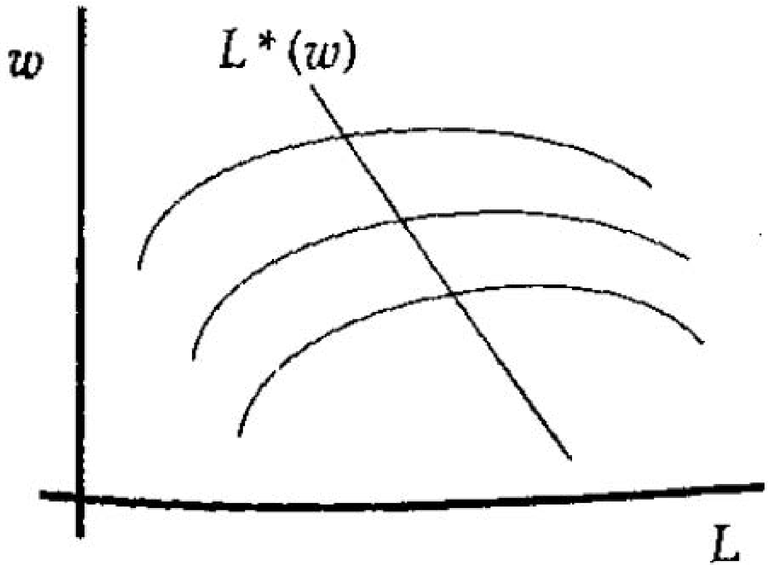
$$\pi(\omega, L) = R(L) - \omega L$$

令$\pi(\omega, L) = \overline{\pi}$, 则得到一条等利润曲线, 该曲线表明了厂商1利润不变条件下ω与L之间的对应关系:

$$\begin{aligned}
\overline{\pi} &= R(L) - \omega L \\
\omega &= \frac{R(L) - \overline{\pi}}{L} \\
\frac{d\omega}{dL} &= \frac{R'(L) - \omega}{L} \\
\frac{d^2\omega}{dL^2} &= \frac{R''(L)}{L}
\end{aligned}$$

等利润函数是一个凹函数, 最高点满足企业的反应方程. 在最高点左侧函数单调递增, 右侧单调递减.

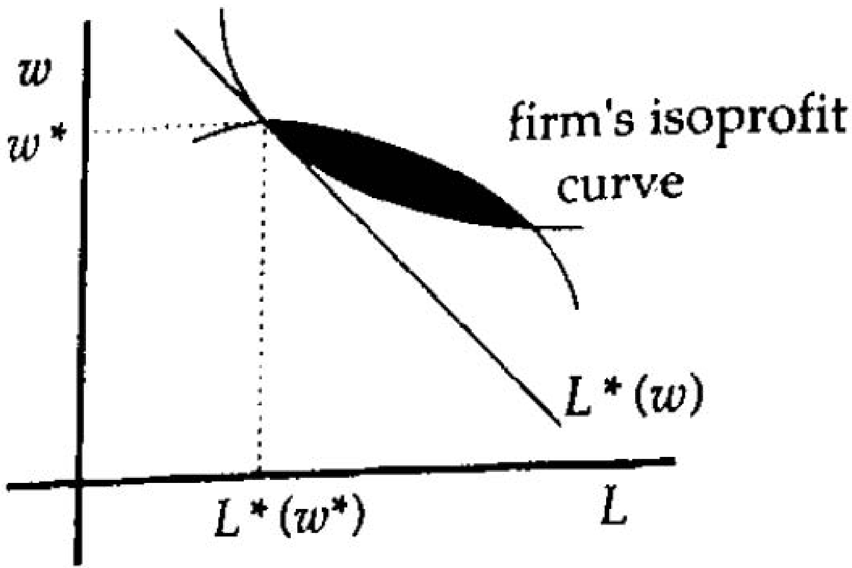
✍ 等利润曲线位置关系: 由于$\omega = \frac{R(L)-\overline{\pi}}{L}$, 所以等利润曲线越高, 则利润值$\pi$越小.



☞ 工会的效用最大化条件: 工会的无差异曲线与雇主的劳动需求曲线相切.

☞ 子博弈精炼纳什均衡的确定: 在给定雇主劳动需求曲线基础上的工会效用最大化条件确定了子博弈精炼均衡. 此时, 工会无差异曲线与劳动需求曲线相切, 与雇主等利润曲线相交.

☞ 帕累托有效性条件: 雇主的等利润曲线与工会的无差异曲线相切. 显然, 子博弈精炼纳什均衡不满足这一条件.



4 讨价还价模型

- 概述: Rubinstein, 1982. 两人分割一块蛋糕; 首先由参与人1提出分配方案, 参与人2发表意见—同意或者反对; 若同意则按照该方案分配; 否则由参与人2提出分配方案; 如此反复, 直到一个参与人的出价被另一个参与人接受为止. 假设: 每个人都想早点吃到蛋糕.
  - 两个参与人: $i = 1, 2.$
  - 行动分为两类: 提出分配方案$(x_i,\ 1 - x_i)$; 同意或者反对.
  - 信息: 行动顺序; 存在折旧, 因子分别为$\delta_1,\ \delta_2$.
  - 支付: 如果博弈在时期t结束, 该时期参与人i出价, 则

$$\pi_1 = \delta_1^{t-1} x_i;\ \pi_2 = \delta_2^{t-1}(1 - x_i)$$

- 若博弈只进行有限期, 则可采用逆向归纳法求解均衡. 当然, 博弈至少得持续两期, 方称得上是讨价还价博弈.
  - 若博弈在第二期结束, 则结果是$(1-\delta_2, \delta_2)$. 思考: 对应的子博弈精炼均衡是什么?
  - 三期对应的均衡结果是: $(1-\delta_2(1-\delta_1), \delta_2(1-\delta_1))$.
  - 后发优势: 在有限期博弈中, 谁最后一个采取行动, 谁得到相对多的支付.

☛ 若讨价还价可进行无限期, 则唯一的子博弈精炼纳什均衡结果是$\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, 1-\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}\right)$.

☞ 原博弈与任意一个奇数期开始的子博弈等价, 此时依旧是参与人1提出其分配方案.

☞ 假设在t期参与人1所能得到的最大份额是M, 则他在第$t-2$期所能得到的最大份额是

$$\begin{array}{ccccc} t-2 & & t-1 & & t \\ \max u_1 = 1-\delta_2\left(1-\delta_1 M\right) & \leftarrow & \min u_2 = 1-\delta_1 M & \leftarrow & \max u_1 = M \end{array}$$

由于t期开始的子博弈与$t-2$期开始的子博弈一样, 因此

$$1-\delta_2(1-\delta_1 M) = M \Leftarrow M = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$$

☞ 假设在t期参与人1所能得到的最小份额是m, 则他在第$t-2$期所能得到的最小份额是

$$\begin{array}{ccccc} t-2 & & t-1 & & t \\ \min u_1 = 1-\delta_2\left(1-\delta_1 m\right) & \leftarrow & \max u_2 = 1-\delta_1 m & \leftarrow & \min u_1 = m \end{array}$$

类似地, 必有

$$1-\delta_2\big(1-\delta_1 m\big) = m \Leftarrow m = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$$

☞ 参与人1在任意阶段所能得到的最大等于其最小份额, 这说明该份额就是其均衡支付. 因此其战略就是: 奇数期总是要求$\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$, 偶数期接受不小于$\frac{\delta 1-\delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$的份额, 拒绝任何较小的份额.

☞ 类似地, 可以得到参与人2的子博弈精炼均衡策略.

☞ 子博弈精炼纳什均衡结果是贴现因子δ的函数, 与参与人的耐心相关, 谁耐心好, 则得到优势.

5 作业

☛ 子博弈精炼纳什均衡的确定: P. 139第3题, 第4题.