马克思生产价格方程组的数学特性

[作者]:白暴力

马克思生产价格方程组的数学特性[①]

白暴力

对“价值转化形式”的研究，需要有一个数学上的基础：“Frobenius定律”，这个定律
格方程组的数学特性，揭示价值转化为生产价格过程中的客观经济现象。本文为“价值转
要的学术基础。

一、马克思生产方程组的矩阵表达

用q_i表示第i中商品的数量，

$$w_i^T = \frac{W_i^T}{q_i}$$

表示单位商品的生产价格，用

$$\alpha_{ij} = \frac{X_{ij}}{q_i}$$

表示生产单位第i种商品所耗费的第i种商品的数量，则马克思生产价格方程组

$$W_i^T = (1+r)\sum_{j=1}^{n} X_{ij} w_j^T \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

可写为

$$w_i^T = (1+r)\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} w_j^T \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

用矩阵表达则为

$$[(1+r)A - I]w^T = 0 \qquad (1)$$

其中，$A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$生产耗费系数矩阵，$I$是单位矩阵。（1）式就是马克思生产价格方程组

二、矩阵的特征值和特征向量与生产价格方程组的解

1、矩阵的特征值和特征向量

数量λ称为$n\times n$矩阵A的一个特征值，如果存在一个n阶向量$x\neq 0$使

$$Ax=\lambda x$$

向量x称为A的特征向量。

2、方程组的解

调整

$$Ax=\lambda x$$

为

$$Ax-\lambda x=0$$

$$\left[A-\lambda I\right]x=0$$

$$\left[\frac{1}{\lambda}A-I\right]x=0$$

满足这个方程组的λ和x就是A的特征值和特征向量，或者说，A的特征值λ和特征向量x

解。

3、马克思生产价格方程组的解与A的特征值和特征向量

令

$$(1+r)=\frac{1}{\lambda}$$

即

$$\lambda=\frac{1}{1+r}$$

或

$$r=\frac{1}{\lambda}-1=\frac{1-\lambda}{\lambda}$$

则有

$$\left[(1+r)A-I\right]x=0$$

令

$$x=w^T$$

则有

$$\left[(1+r)A-I\right]w^T=0$$

这正是马克思生产价格方程组。根据前面的说明，可以看出，马克思生产价格方程组的解

阵A的特征值λ决定的，生产价格向量w^T则是特征值λ对应的特征向量。

三、**Frobenius**定律[③]

1、如果$A=(\alpha_{ij})_{n\times n}\geq 0$，$A$有至少一个非负特征值，最大的非负特征值称为$A$的Frobenius根，i

于$\lambda(A)$的非负特征向量。

2、如果$A=(\alpha_{ij})_{n\times n}\geq 0$是不可分解的，则

- Frobenius根$\lambda(A)>0$是特征方程的一个单根，并且存在一与之相伴的特征向量$x>0$。
- 如果$Ax=\mu x$对于某一$\mu\geq 0$和$x>0$成立，则$\mu=\lambda(A)$。