风险规避

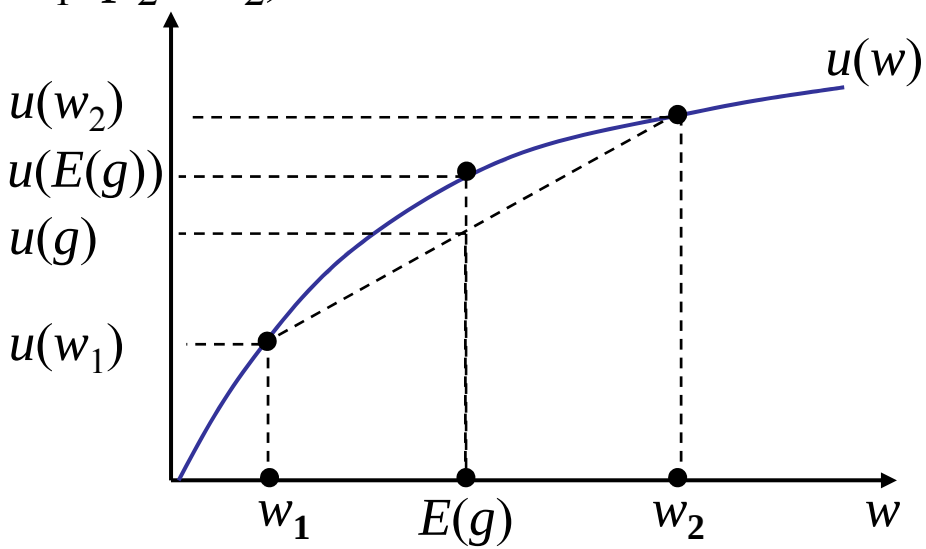
上海财经大学经济学院

风险规避

- $A=\mathbb{R}_+$
  - 简化： $A=(w_1, w_2,\ldots, w_n)$
  - 概率分布： $(p_1, p_2,\ldots, p_n)$
  - $g= (p_1 \circ w_1,\ldots, p_n \circ w_n)$
  - 假设 ：期望效用函数$u(\cdot)$可微，而且有$u'(w)>0$
  - $E(g)=\sum_{i=1}^{n} p_i w_i$
  - $u(g)=\sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i)$
  - $u(E(g))=u(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i)$

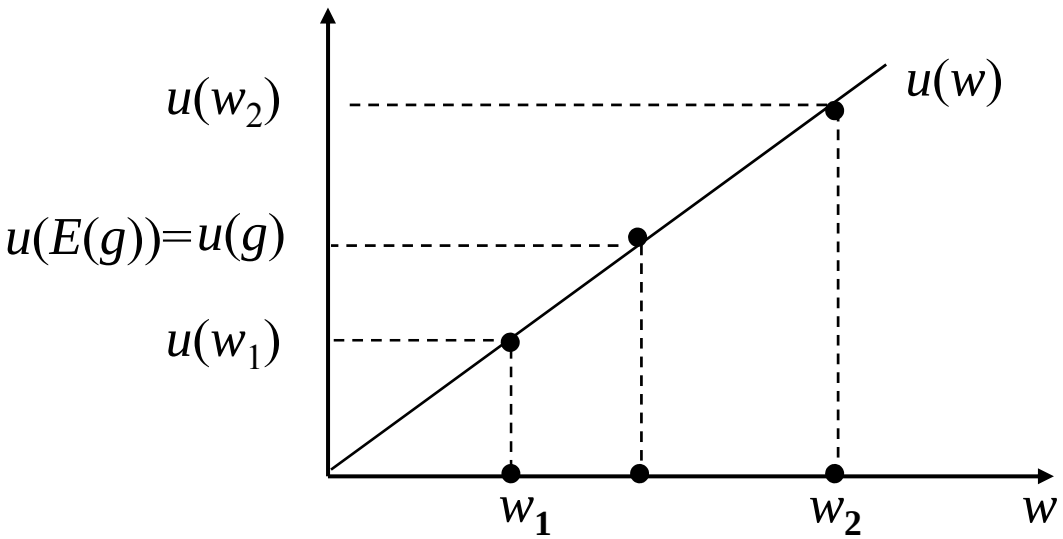
风险规避：定义

- 定义4.4：风险厌恶
  - 给定任意的非退化简单彩票 $g \in \mathcal{G}$，
    - 如果有$u(\mathrm{E}(g)) > u(g)$，那么，该消费者是风险规避
      - $u(w)$是严格凹函数：$u(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i) > \sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i)$
  - $g = (p_1 \circ w_1, p_2 \circ w_2)$



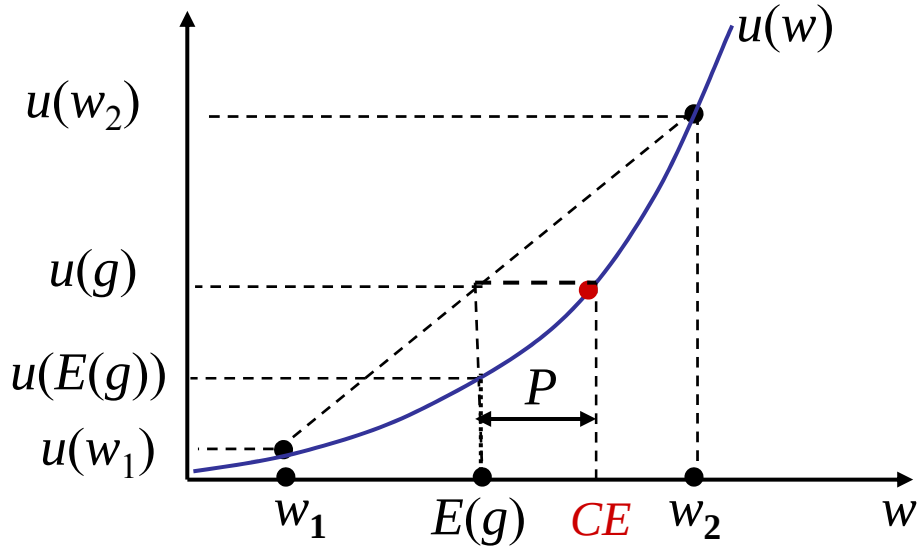
风险规避：定义

- 定义4.4：风险中性
  - 给定任意的非退化简单彩票 $g \in \mathcal{G}$，
    - 如果有$u(\mathrm{E}(\mathrm{g})) = u(\mathrm{g})$，那么，该消费者是风险中性
      - $u(w)$是线性函数：$u(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i)$



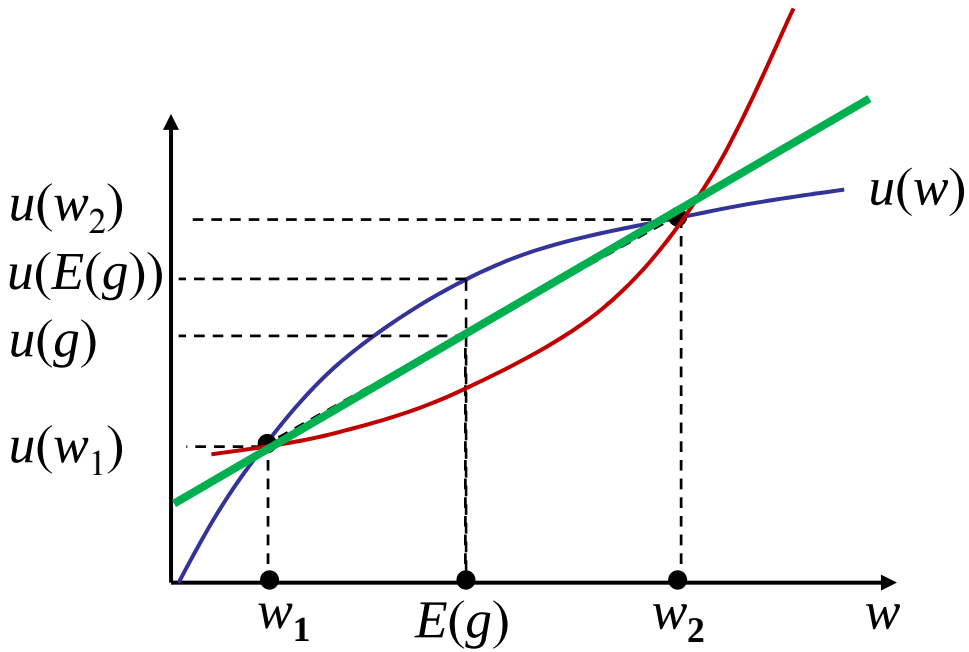
风险规避：定义

- 定义4.4：风险爱好
  - 给定任意的非退化简单彩票 $g \in \mathcal{G}$，
    - 如果有$u(\mathrm{E}(g)) < u(g)$，那么，该消费者是风险爱好
      - $u(w)$是严格凸函数：$u(\sum_{i=1}^{n} p_i w_i) < \sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i)$



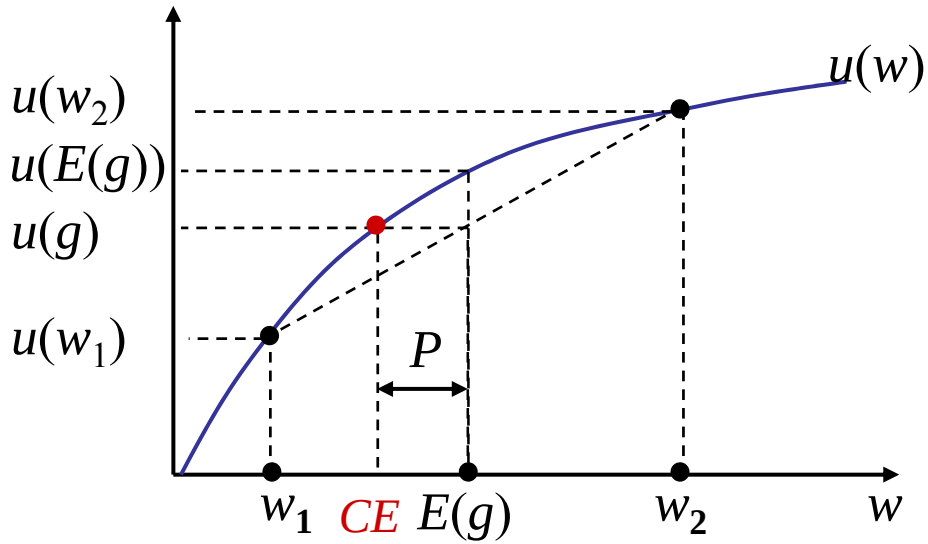
风险规避

- 命题： $u(w)$性质与风险态度
  - 例：$w=(w_1, w_2)$, $g=(.5\ ^{0}\ w_1,.5\ ^{0}\ w_2)$



风险规避度量

- 定义4.5：
  - 确定性等价CE: $u(CE) = u(g)$
  - 风险金P: $u(E(g) - P) = u(g)$
    - $P = E(g) - CE$, $[CE + P = E(g)]$

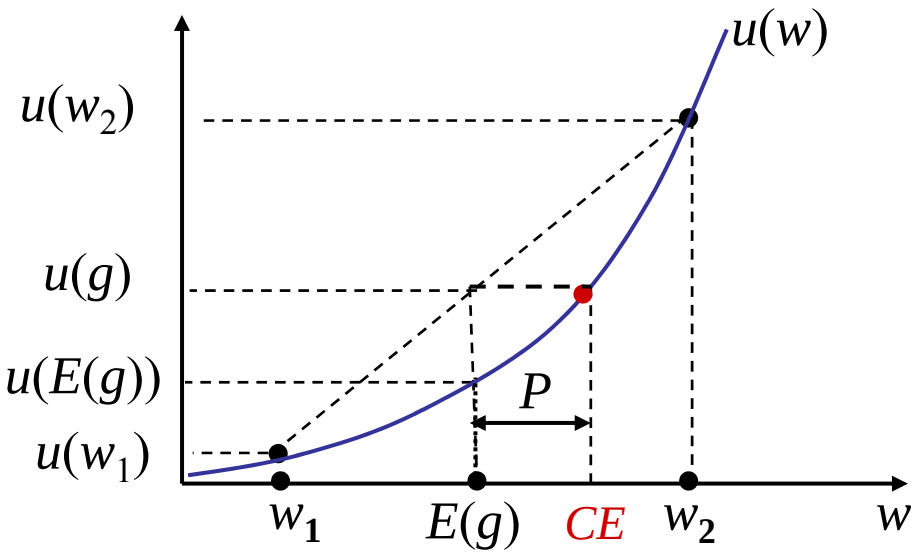


风险规避度量

- 定理4.C.1: 如果决策者是一个期望效用最大化者，那么下列命题是等价的：
  - 决策者是风险规避者
  - $u(.)$是严格凹函数
  - $CE < \mathrm{Eg}$
  - $P > 0$

风险规避度量

- 决策者是风险爱好者
  - $u(.)$是严格凸函数
  - $CE > \mathrm{Eg}$
  - $P < 0$



风险规避度量

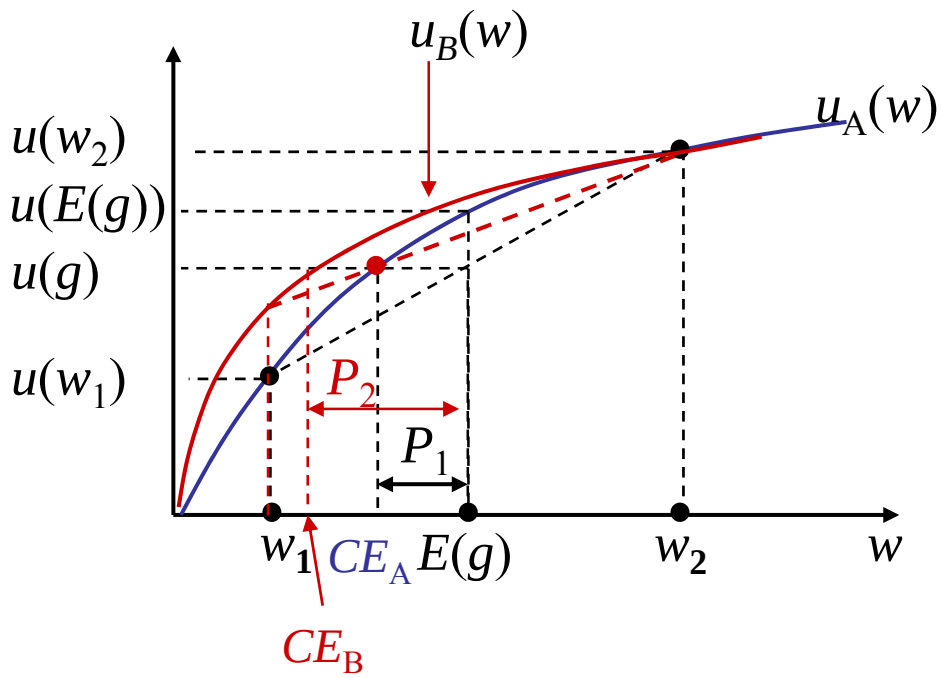
- 例4.5： $u(w)=\ln(w)$
  - $g=(.5^{\circ} w_0 - h, .5^{\circ} w_0 + h)$
  - $E(g)= w_0$
  - $u(CE)= u(g)$

    $\rightarrow \ln(CE) = .5\ln(w_0 - h) + .5\ln(w_0 + h) = \ln(w_0^2 - h^2)^{1/2}$

    $\rightarrow CE = (w_0^2 - h^2)^{1/2} < E(g)$
  - $P = w_0 - CE = w_0 - (w_0^2 - h^2)^{1/2} > 0$
  - 正仿射变换不影响CE和 P

风险规避度量

- 不同消费者之间风险态度的比较

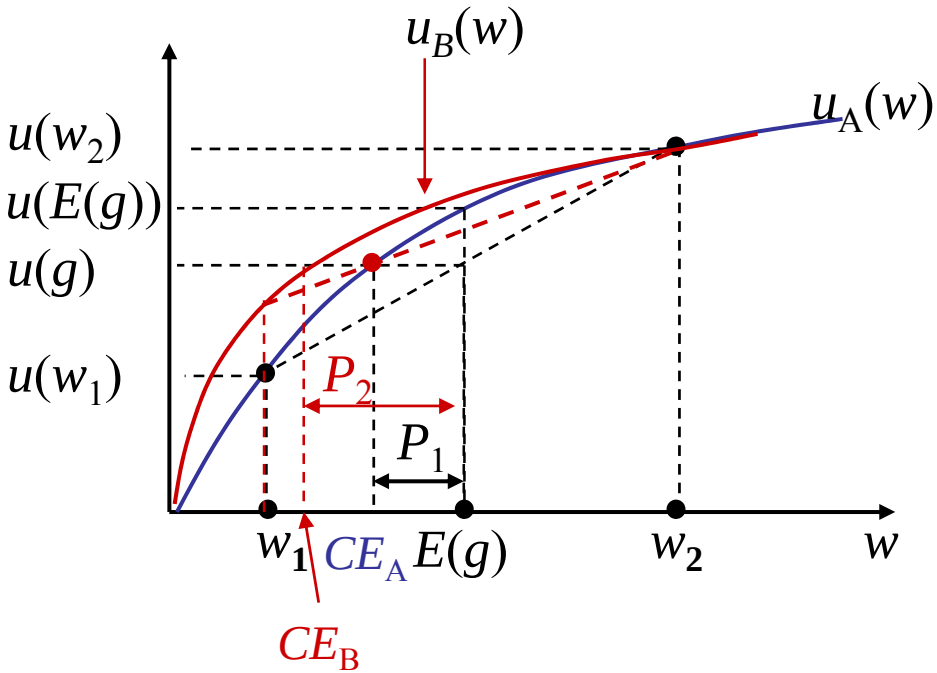


风险规避度量

- 定理4.C.2(A)：下列关于消费者1比消费者2更风险规避的定义是等价的
  - 对任意的g，都有 $CE_1 \leq CE_2$
  - 对任意的g，都有 $P_1 \geq P_2$

风险规避度量

- 不同消费者之间风险态度的比较
  - $u_B(w)$比$u_B(w)$更凹
  - 存在一个凹函数$h(.)$使得，$u_B(w)=h(u_A(w))$



风险规避度量

- Arrow-Pratt 绝对风险规避系数
  - 定义：

$$R_A = -\frac{u''}{u'}$$

  - 例：
    - $u(w)=\ln(w)$ $\quad R_A = 1/w$
    - $u(w)= w^{1/2}$ $\quad R_A = 1/2w$
    - $u(w)= -e^{-rw}$ $\quad R_A = r$
  - 正仿射变换不影响R_A

风险规避度量

- 定理4.C.2：下列关于消费者1比消费者2更风险规避的定义是等价的
  - 对任意的g，都有 $CE_1 \leq CE_2$
  - 对任意的g，都有 $P_1 \geq P_2$
  - 存在一个凹函数$h(.)$使得，$u_1(w)=h(u_2(w))$
  - 对任意的财富水平都有：$R_{A1} \geq R_{A2}$,

定理4.C.2证明*

- 令消费者1和2的VNM效用函数分别为：$u(w)$和$v(w)$
- 假设： $R_{A1} = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)} > -\dfrac{v''(w)}{v'(w)} = R_{A2} \qquad \forall w \geq 0$
- 假设： $v(w):[0,\infty] \to [0,\infty]$ 令 $x = v(w) \to w = v^{-1}(x)$
- 令 $h(x) = u(v^{-1}(x)) \qquad x \geq 0$

$$h'(x) = \frac{u'(v^{-1}(x))}{v'(v^{-1}(x))} > 0$$

$$h''(x) = \frac{u'(v^{-1}(x))[u''(v^{-1}(x))/u'(v^{-1}(x)) - v''(v^{-1}(x))/v'(v^{-1}(x))]}{[v'(v^{-1}(x))]^2} < 0$$

- 得到： $u(w) = h(v(w)) \qquad w \geq 0 \qquad h''(x) < 0$

定理4.C.2证明（续）*

- 给定 $u(w)=h(v(w)) \qquad w\geq 0\ h'>0,\ \ h''(x)<0$
- 令 g= (p_1 ⊙ w_1,…, p_n ⊙ w_n)
- 由定义 $u(CE_1)=\sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i) \qquad v(CE_2)=\sum_{i=1}^{n} p_i v(w_i)$

$$u(CE_1)=\sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i)=\sum_{i=1}^{n} p_i h(v(w_i))$$

- 因为$h(\cdot)$是严格凹函数：

$$u(CE_1)=\sum_{i=1}^{n} p_i h(v(w_i))<h\left(\sum_{i=1}^{n} p_i v(w_i)\right)=h(v(CE_2))$$

- 因为$h(\cdot)$是严格递增函数，得到

$$CE_1<CE_2$$

例2：风险资产需求

- 禀赋：w
- 风险资产：$r = (p_1 \circ r_1, \ldots, p_n \circ r_n)$
- 风险资产购买量：β
- 的状态i下的财富价值为： $w_i = w - \beta + \beta(1 + r_i) = w + \beta r_i$
- 资产组合：$g(\beta) = (p_1 \circ (w + \beta r_1), \ldots, p_n \circ (w + \beta r_n))$
- 最优资产组合问题：

$$\max_{\beta} \quad u(g(\beta)) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(w + \beta r_i) \qquad \text{st. } 0 \le \beta \le w$$

$$\frac{\partial u(g(\beta))}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} p_i u'(w + \beta r_i) r_i$$

$$\frac{\partial^2 u(g(\beta))}{\partial \beta^2} = \sum_{i=1}^{n} p_i u''(w + \beta r_i) r_i^2$$

例2：风险资产需求

- β*=0 （对于风险规避者）

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u(g(\beta))}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} p_i u'(w+\beta r_i) r_i \Big|_{\beta^*=0} \le 0 \qquad \frac{\partial^2 u(g(\beta))}{\partial \beta^2} = \sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta r_i) r_i^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u'(w) r_i \le 0 \qquad u''(\cdot) < 0$$

$$\Leftrightarrow u'(w) \sum_{i=1}^{n} p_i r_i \le 0$$

$$\Leftrightarrow E(r) \le 0$$

– $\beta^* > 0 \;\; iff \;\; E(r) > 0$

例2：风险资产需求

- $\beta^* \in (0,w)$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u'(w+\beta^* r_i) r_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i^2 < 0$$

- $\beta^*(w)$

$$\frac{\partial \beta(w)}{\partial w} = \frac{-\partial F / \partial w}{\partial F / \partial \beta} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i^2} \begin{matrix} ? \\ <0 \end{matrix}$$

风险规避

- 绝对风险规避系数与财富
  - DARA：风险规避递减性质
  - IARA： 风险规避递增性质
  - CARA：风险规避不变性质

- 如果消费者具有DARA
  - 由DARA，得到 $R_a(w+\beta r_i)r_i<R_a(w)r_i$
    - 当$r_i<0$ 时，$w+\beta r_i<w$ → $R_a(w+\beta r_i)>R_a(w)$ → $R_a(w+\beta r_i)r_i<R_a(w)r_i$
    - 当$r_i>0$ 时，$w+\beta r_i>w$ → $R_a(w+\beta r_i)<R_a(w)$ → $R_a(w+\beta r_i)r_i<R_a(w)r_i$
  - 由定义 :$R_a(w+\beta * r_i) \equiv -\dfrac{u''(w+\beta * r_i)}{u'(w+\beta * r_i)}$ $\quad i=1,2,..,n$

$$\Rightarrow -u''(w+\beta * r_i) = R_a(w+\beta * r_i)u'(w+\beta * r_i)$$

$$\Rightarrow -u''(w+\beta * r_i)r_i = R_a(w+\beta * r_i)r_i u'(w+\beta * r_i)$$

$$\Rightarrow -u''(w+\beta * r_i)r_i < R_a(w)r_i u'(w+\beta * r_i)$$

  - 令$k=R_a(w)$

$$\Rightarrow -u''(w+\beta * r_i)r_i < k \cdot r_i u'(w+\beta * r_i) \qquad i=1,2,..,n$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta * r_i)r_i < 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i r_i u'(w+\beta * r_i) = k\sum_{i=1}^{n} p_i r_i u'(w+\beta * r_i)$$

–得到 $\dfrac{\partial \beta(w)}{\partial w} = \dfrac{-\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta * r_i)r_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta * r_i)r_i^2} > 0$

风险规避

- 相对风险规避系数

$$R_r = -\frac{wu''}{u'} = wR_a$$

–例：

- $u(w)=\ln(w) \rightarrow R_a=1/w \rightarrow R_r=1$
- $u(w)= w^{1/2} \rightarrow R_a=1/2w \rightarrow R_r=1/2$

例3：保险需求

- Endowment: w_0
- Risk: $g=(\alpha \circ (w_0-L), (1-\alpha) \circ w_0)$ $\alpha\in(0,1)$
- Actually fair price of insurance ρ:
  - $\alpha(\rho-1)+(1-\alpha)\rho=0 \rightarrow \rho=\alpha$
- The amount of insurance x

$$g(x)=(\alpha \circ (w_0-L-\alpha x+x), (1-\alpha) \circ (w_0-\alpha x)$$

$$\mathbf{Max}_x \quad u(g(x))=\alpha\, u(w_0-L-\alpha x+x),+(1-\alpha)\, u(w_0-\alpha x)$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)\alpha u'(w_0-\alpha x-L+x)-\alpha(1-\alpha)u'(w_0-\alpha x)=0$$

$$\Rightarrow u'(w_0-\alpha x-L+x)=u'(w_0-\alpha x)$$

$$\Rightarrow x=L$$

实验证据：
实际生活中人们的风险态度？

- **[8]** 请你在以下两个赌注中选一个
  - A： 25% 的可能性赢 $6000，
  - B： 25% 的可能性赢 $4000，25% 可能性赢 $2000；
  - 结果：68人中18% 选A，82%选B

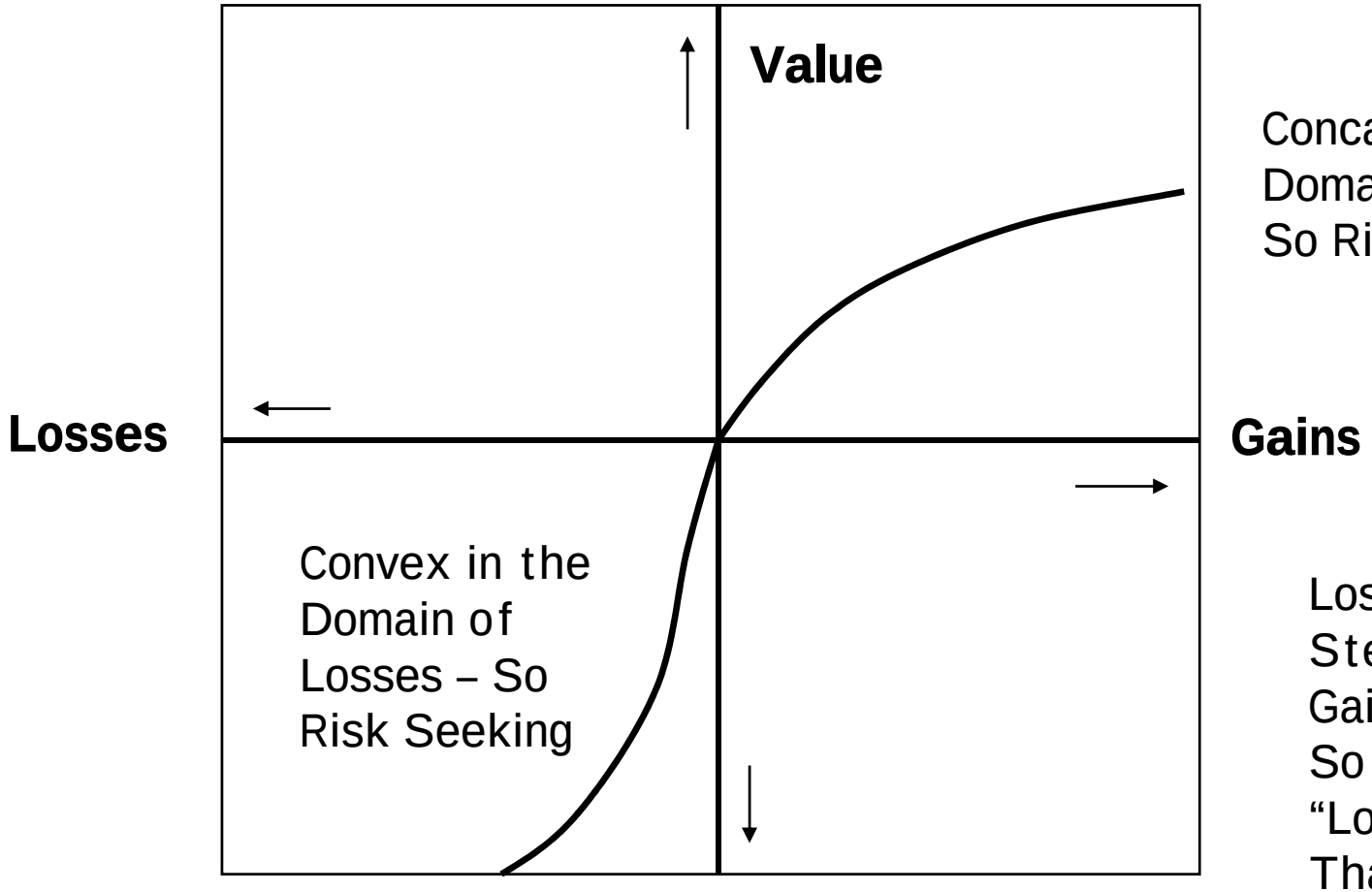
- 所以，对大多数人而言，两个赌注的期望价值满足
  - $\pi(.25)^* v(6000) < \pi(.25)^* v(4000) + \pi(.25)^* v(2000)$
  - $v(6000) < v(4000) + v(2000)$
  - →支持价值函数v是凹函数

实验证据：
实际生活中人们的风险态度？

- [8’]请你在以下两个赌注中选一个
  - A : 25% 的可能性输 $6000 at 25% chance
  - B : 25% 的可能性输 $4000 ， 25% 的可能性输$2000
  - 结果：68人中70% 选A，30%选B

- 所以，对大多数人而言，两个赌注的期望价值满足
  - $\pi(.25)^* v(-6000) > \pi(.25)^* v(-4000) + \pi(.25)^* v(-2000)$
  - $v(-6000) < v(-4000) + v(-2000)$
  - →支持价值函数v是凸函数

价值函数 (value function)



Concave in the Domain of gains – So Risk Averse

Loss curve is Steeper than Gain curve – So Losses "Loom larger" Than gains

- **选择1：**
  - 方案A可以确定的救活200个生命
  - 方案B有1/3的可能性救活所有人，但存在2/3的可能性没有一个被救活；

- **选择2：**
  - 方案C：将有400人确定的死亡；
  - 方案D：有2/3的可能性会使所有人都死亡，但存在1/3的可能性没有一个死亡；