消费者问题：偏好关系

上海财经大学 经济学院

消费者偏好关系

- A 消费者偏好性质
- B 效用函数
- C 常见的效用函数

消费者偏好关系

- 消费集 （消费者的选择集）
  - 设定消费者选择的选项，以及每个选项所有可能的选择范围
- 假设：消费集 X 的基本性质
  - $\phi \notin X \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}_{+}$
  - X 是闭集
  - X 是凸集
  - $0 \in X$
- 一般性的消费集

$$X = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}_{+} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : x_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

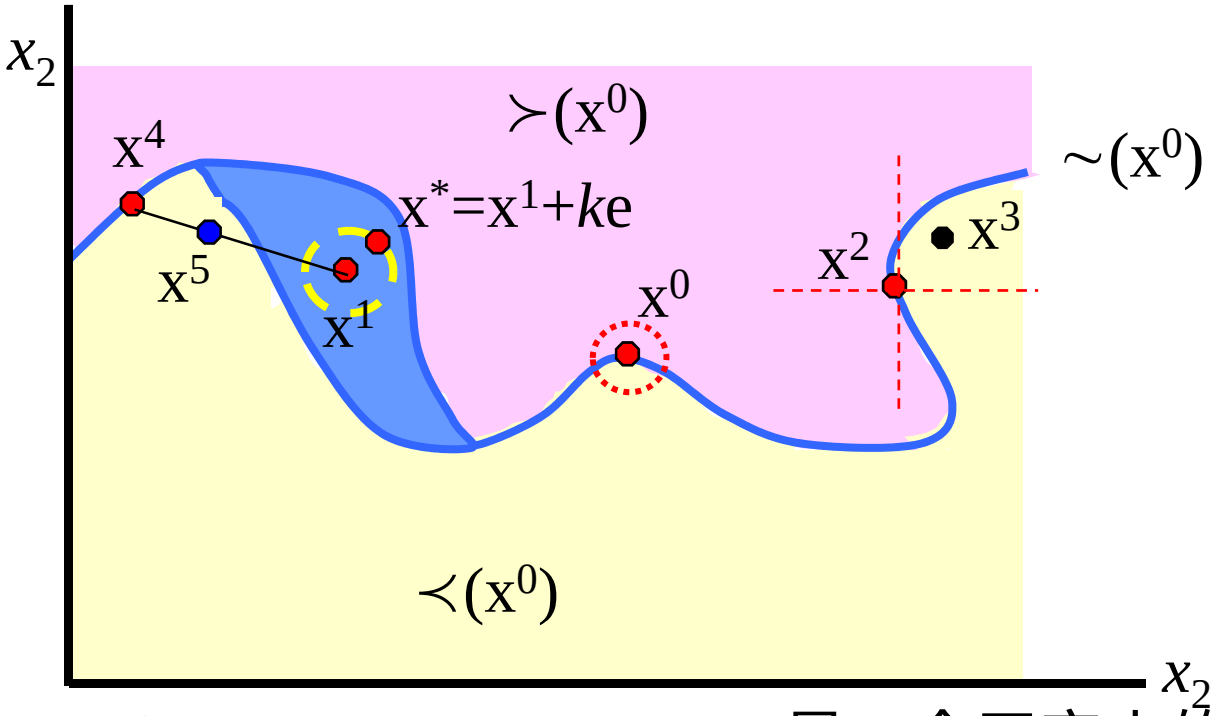
消费者偏好关系

- 消费者偏好关系
  - 定义在消费集X上的二元关系
  - 满足：完备性和可传递性

- 偏好关系的表示
  - 无差异集：$\sim(x^0)=\{x: x\sim x^0\}$
    - 弱偏好集：$\succsim(x^0)=\{x: x \succsim x^0\}$

消费者偏好关系

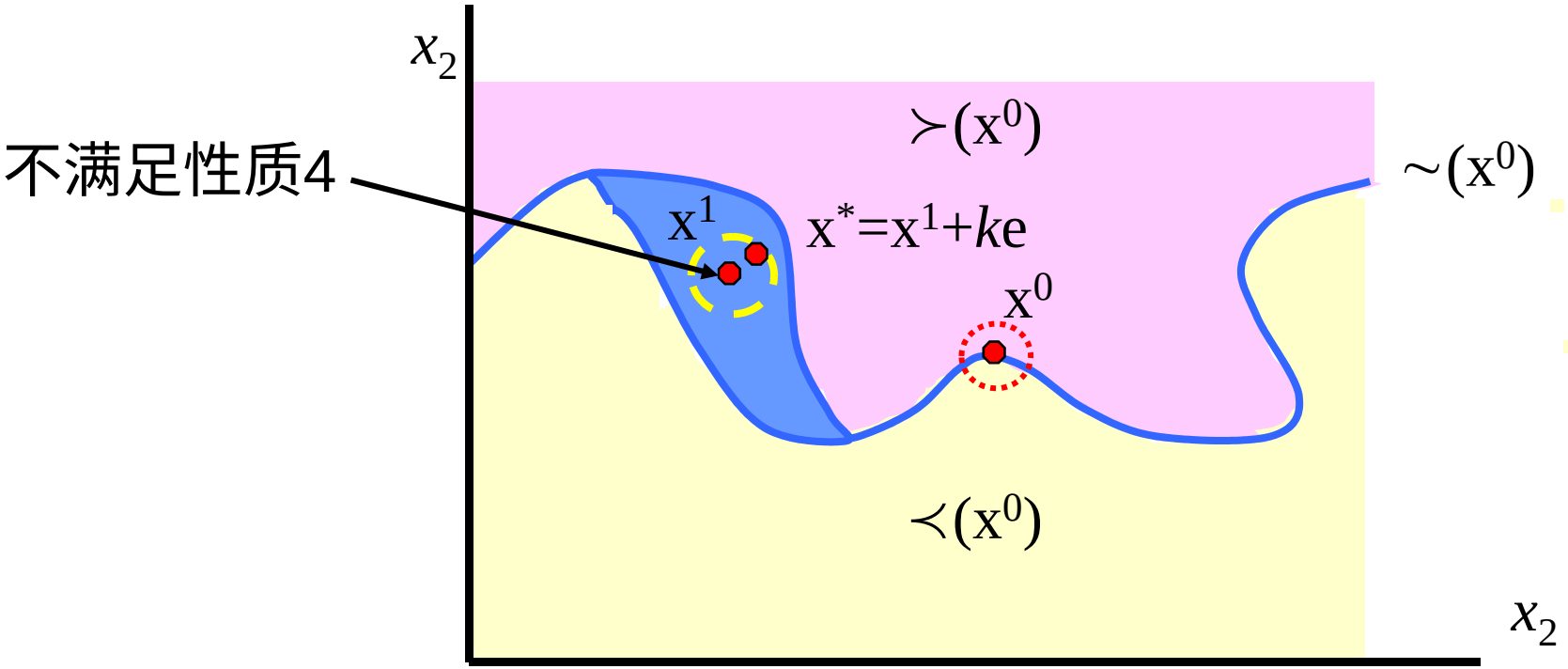
- 满足连续性偏好关系的无差异集合可能的形状



- $x^1 \sim x^*=x^1+ ke$ [e=(1,..,1), k是一个无穷小的实数]
- $x^2 \succ x^3$, $x^3 \gg x^2$
- $x^4 \succ x^5$, $x^5 = tx^1+(1-t)\, x^4$

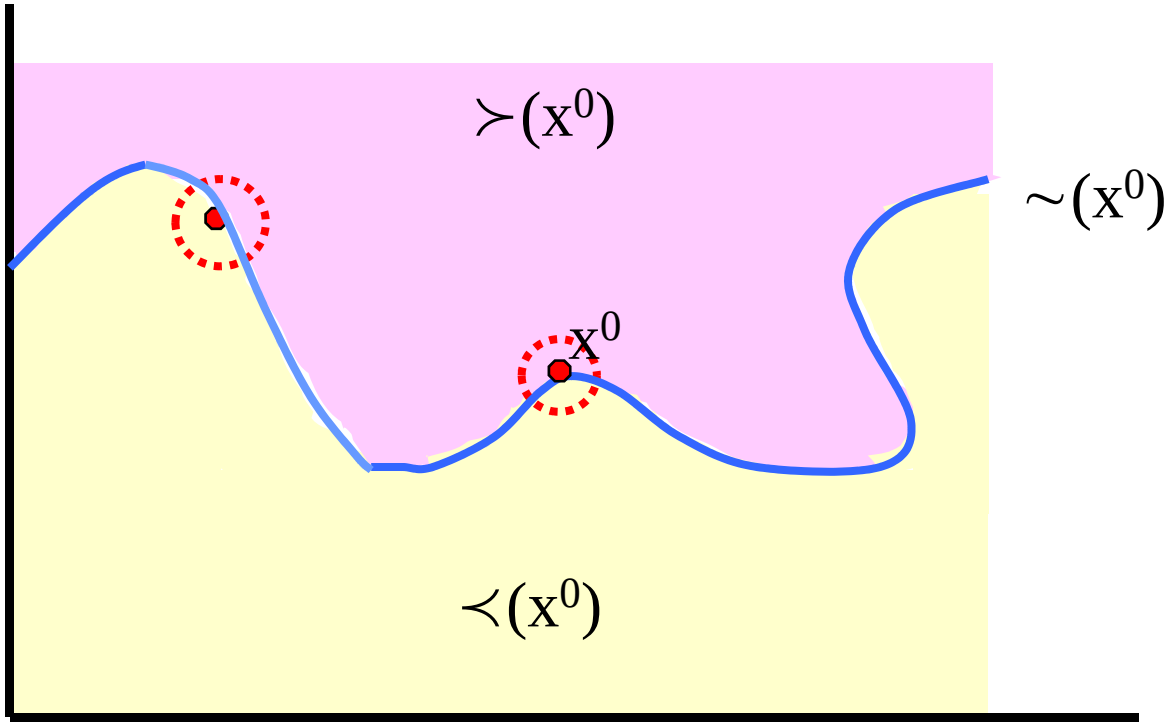
消费者偏好关系

- 性质4：局部非饱和性 (Local Nonsatiation)
  - 如果 $\forall x^0 \in X$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x \in B_\varepsilon(x^0) \cap X$上,有 $x \succ x^0$，那么称偏好关系$\succsim$具有局部非饱和性
  - 总存在改进福利的可能性

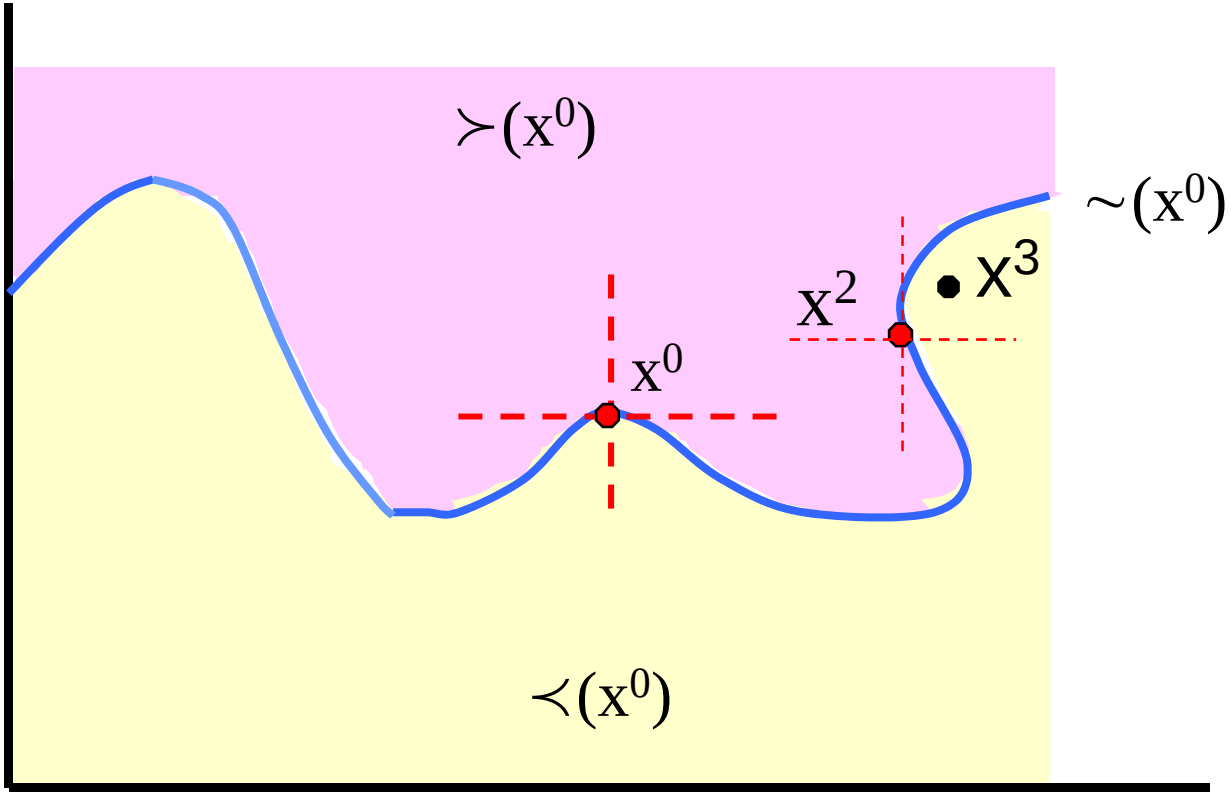


消费者偏好关系

- 性质 4：局部非饱和性
  - 满足局部非饱和性的偏好，无差异集合是一条曲线，不存在无差异区域。



（好的）商品越多越好！！



消费者偏好关系

- 性质 5：严格单调性 (Strictly Monotonicity)
  - $\forall\, x^1, x^2 \in X$,

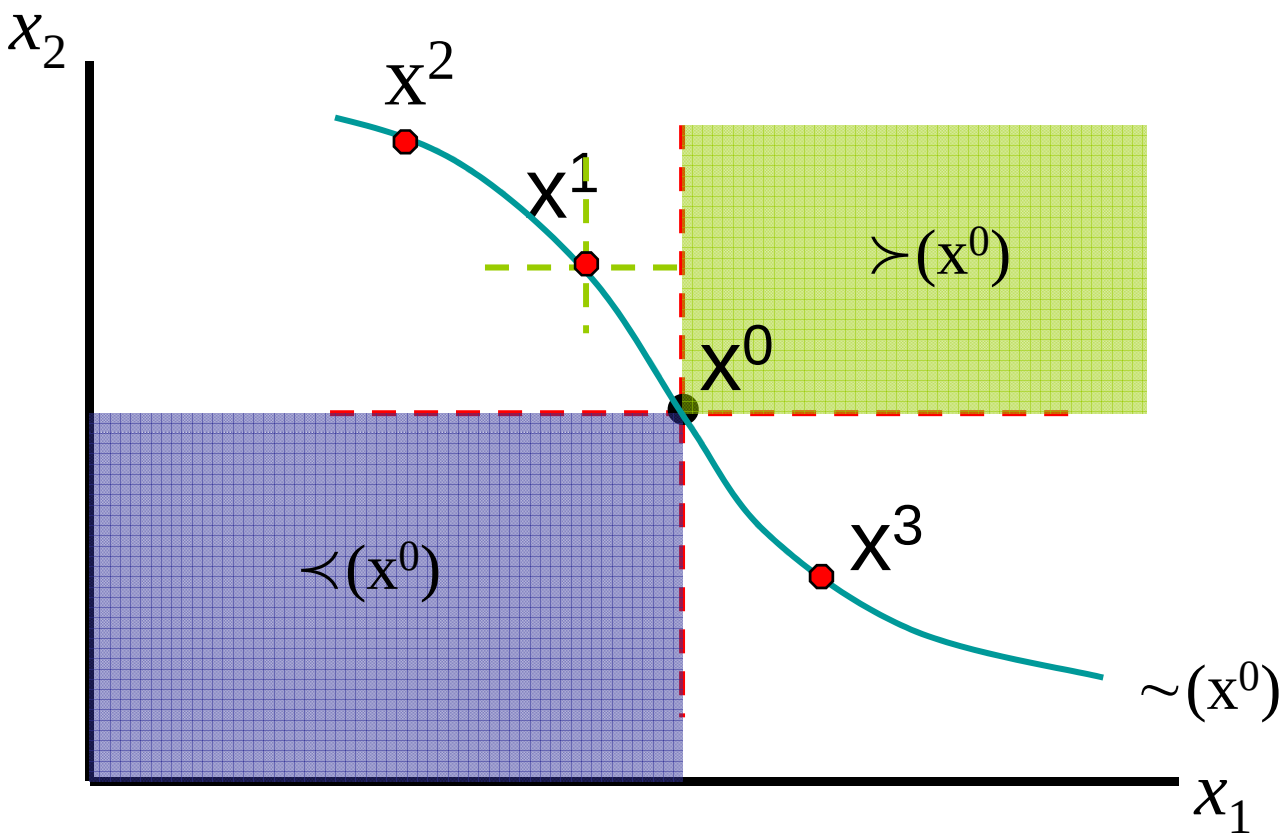
    如果$x^1 \geqslant x^2$，就有 $x^1 \succsim x^2$ ；

    而且，如果$x^1 \gg x^2$，就有 $x^1 \succ x^2$。

    那么,称偏好具有严格单调性
  - 严格单调性→局部非饱和性

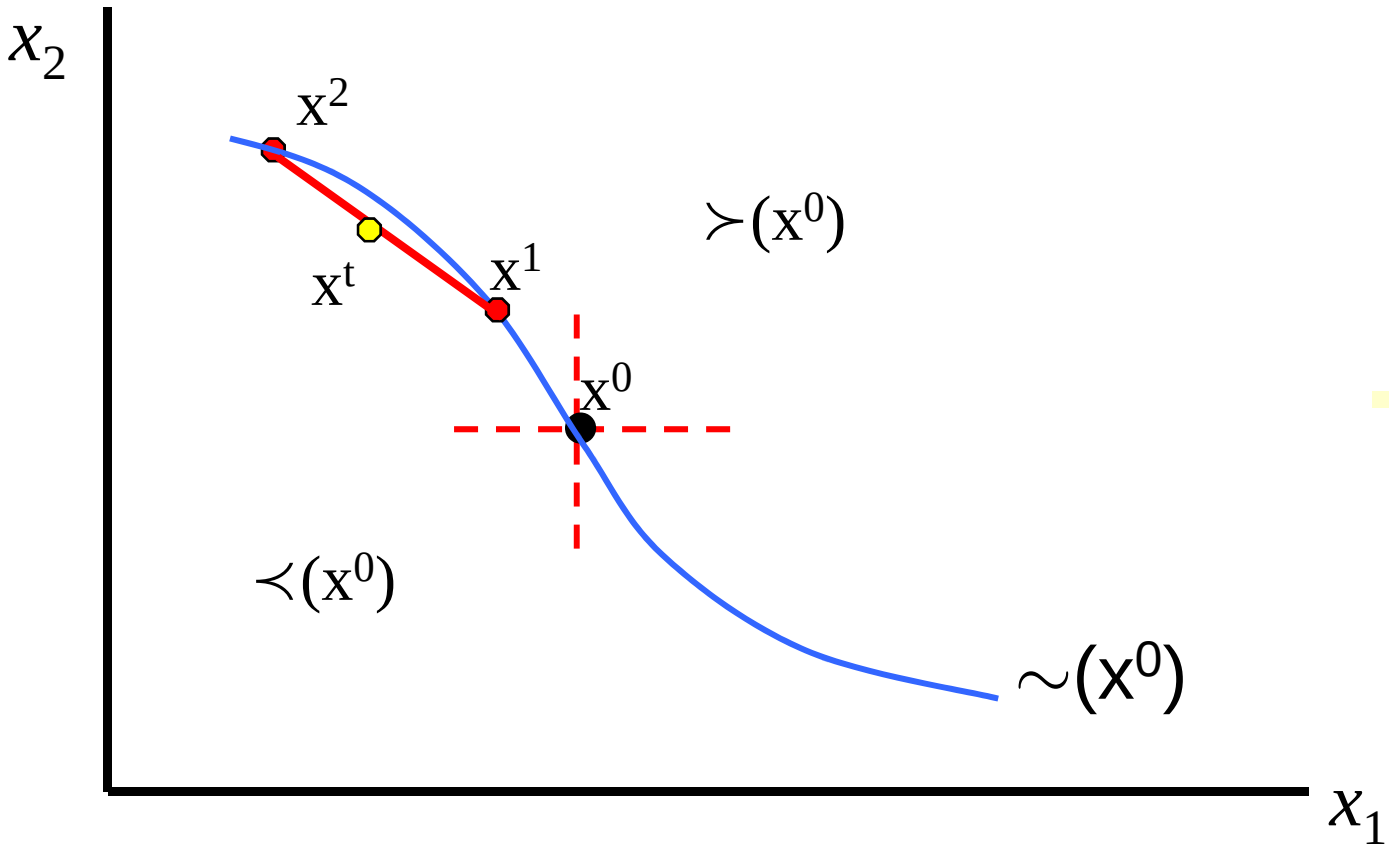
消费者偏好关系

- 如果偏好具有严格单调性，那么无差异曲线斜率为负



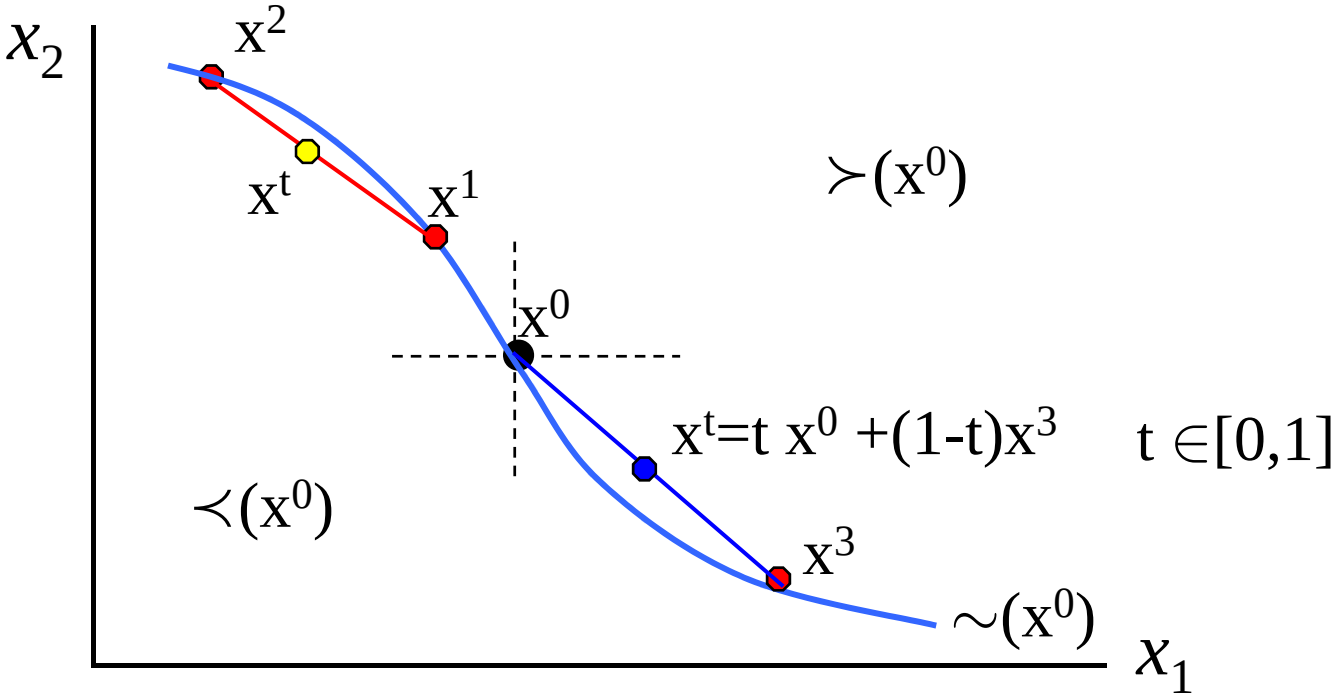
消费者偏好关系

- 凸组合： $x^t = t\,x^1 + (1-t)\,x^2,\ \ t \in [0,1]$



消费者偏好关系

- 性质6：凸偏好
  - D1：$\forall\, x^1, x^2 \in X$，如果$x^1 \succsim x^2$,那么，$x^t = t\,x^1 + (1-t)x^2 \succsim x^2$，$t \in [0,1]$
- 偏好严格单调、凸性 → 无差异曲线凸向原点

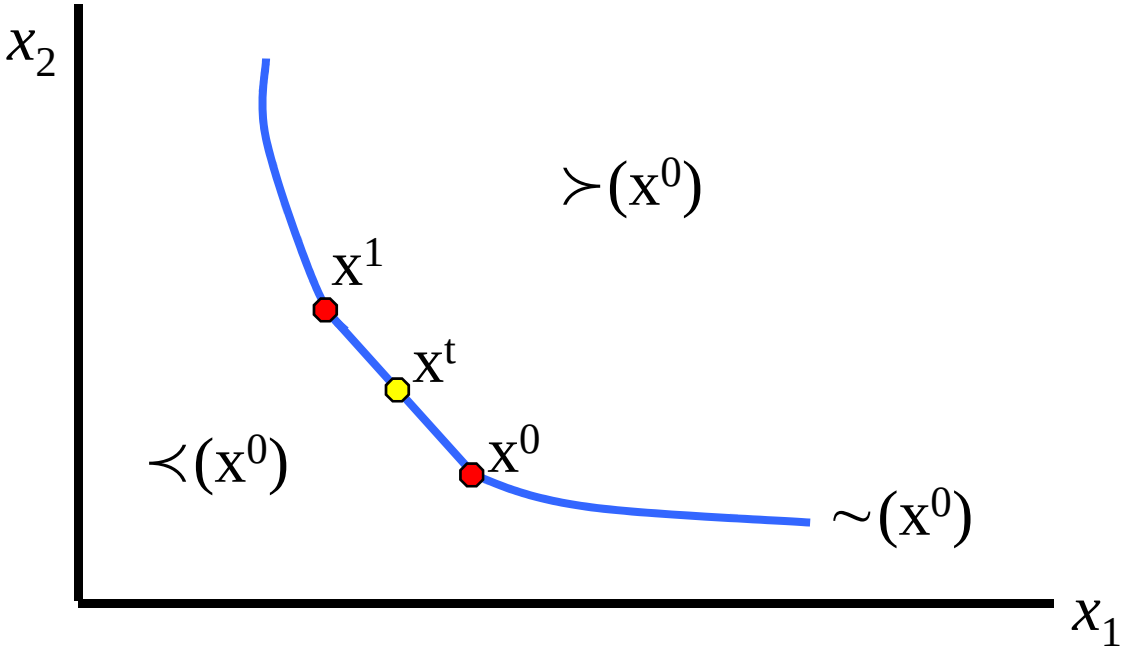


性质6：凸偏好

- D1：$\forall x^1, x^2 \in X$，如果$x^1 \succsim x^2$,那么，$x^t = t x^1 + (1-t)x^2 \succsim x^2$，$t \in [0,1]$
- D2：$\succsim(x^0)$是凸集
- D1→D2
  - 给定偏好关系满足D1，令$x^1, x^2 \in \succsim(x^0)$，
  - 即 $x^1 \succsim x^0$, $x^2 \succsim x^0$, 不失一般性，假设$x^1 \succsim x^2$，
  - 由D1得到： $x^t = tx^1 + (1-t)x^2 \succsim x^2$
  - 由传递性得到： $x^t = tx^1 + (1-t)x^2 \succsim x^0$.，即 $x^t \in \succsim(x^0)$
- D2→D1
  - 给定偏好关系满足D2，令$x^1 \in \succsim(x^0)$
  - 即 $x^1 \succsim x^0$
  - 由D2得到：$tx^1 + (1-t)x^0 \succsim x^0$

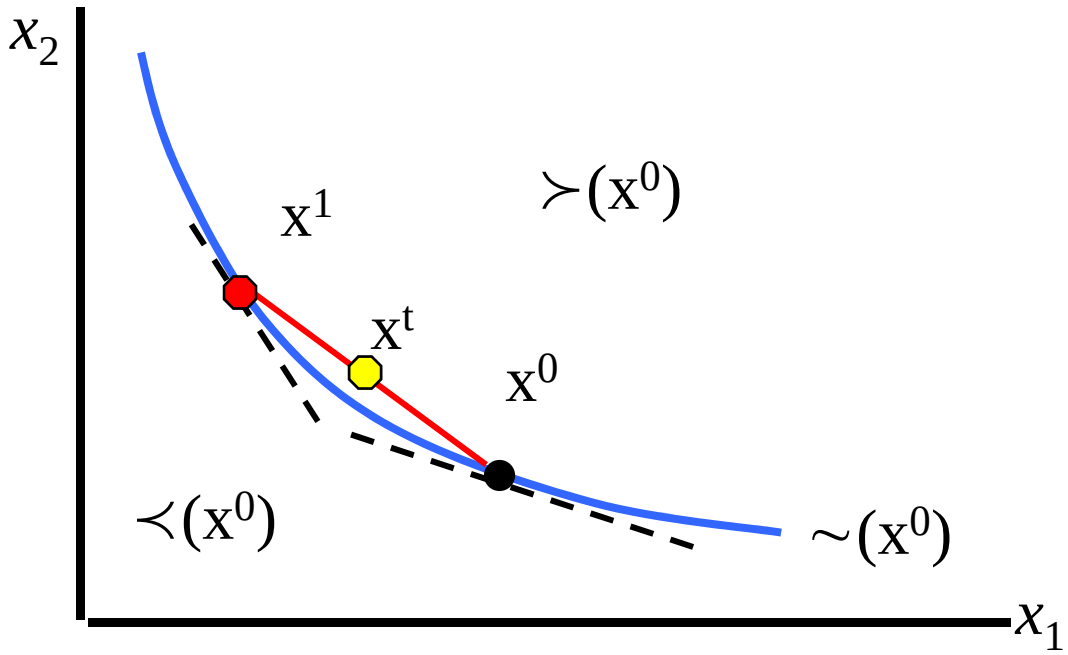
消费者偏好关系

- 例：凸偏好
  - $x^t = t\,x^1 + (1-t)x^0 \sim x^0$， $t \in (0,1)$



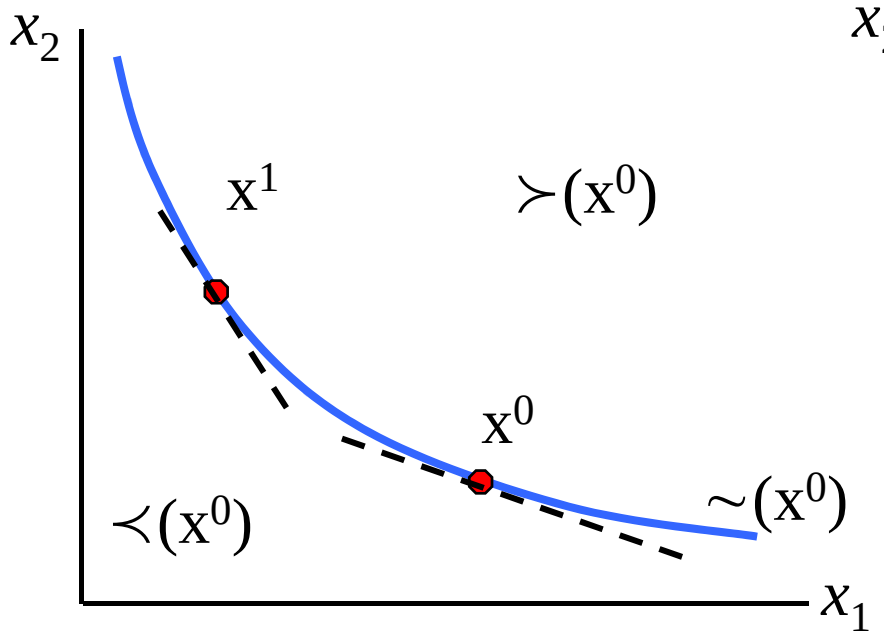
消费者偏好关系

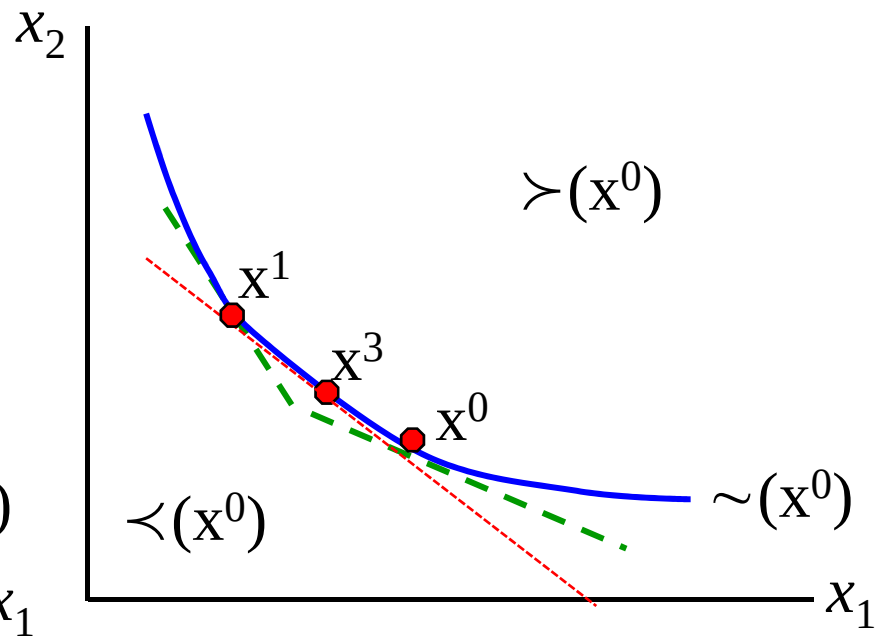
- 性质7：严格凸偏好
  - 如果$x^1 \neq x^0$并且$x^1 \succsim x^0$,那么，$x^t \succ x^0$，$t \in (0,1)$
- 严格单调、严格凸偏好→无差异曲线严格凸向原点



消费者偏好关系

- 边际替代率 $MRS_{12} \equiv -\left.\dfrac{dx_2}{dx_1}\right|_{u=u_0}$
  - 凸偏好 ⇒边际替代率非递增
  - 严格凸偏好⇒边际替代率递减





消费者偏好性质：小结

- 偏好关系性质
  - 性质1：完备性
  - 性质2：可传递性
  - 性质3：连续性
  - 性质4：局部非饱和性
  - 性质5：严格单调性
  - 性质6：凸性
  - 性质7：严格凸性

- 无差异曲线

  →可以用无差异集合表示偏好
  →无差异集是闭集
  →无差异曲线
  →无差异曲线斜率为负
  →无差异曲线凸向原点
  →无差异曲线严格凸向原点

效用函数

- Debru定理 ：连续偏好关系存在连续的效用函数来表示。

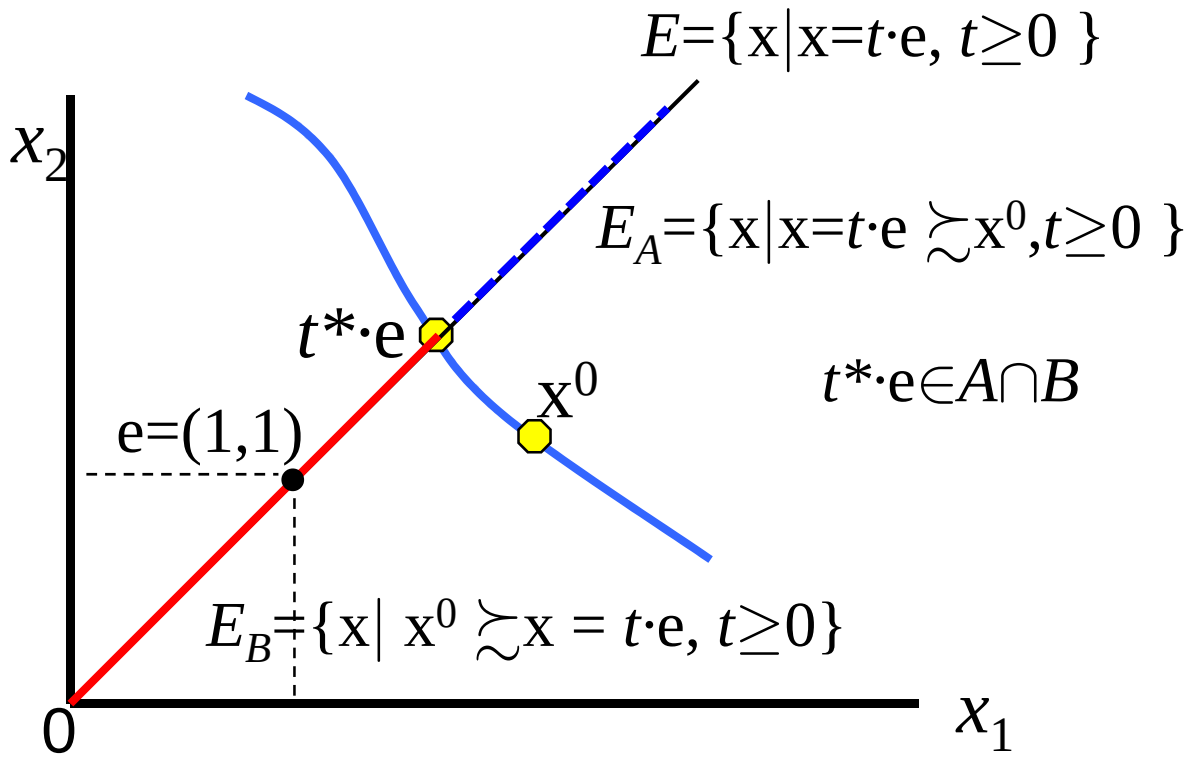
定理

定义在 X 的偏好关系满足连续性和严格单调性，那么就存在一个连续的实值函数 $u(\cdot)$ 表示 $\succsim$ 。

- 证明
  - Step 1:先构造一个实值函数
  - Step 2:然后证明它满足效用函数的条件

定理: 效用函数存在性

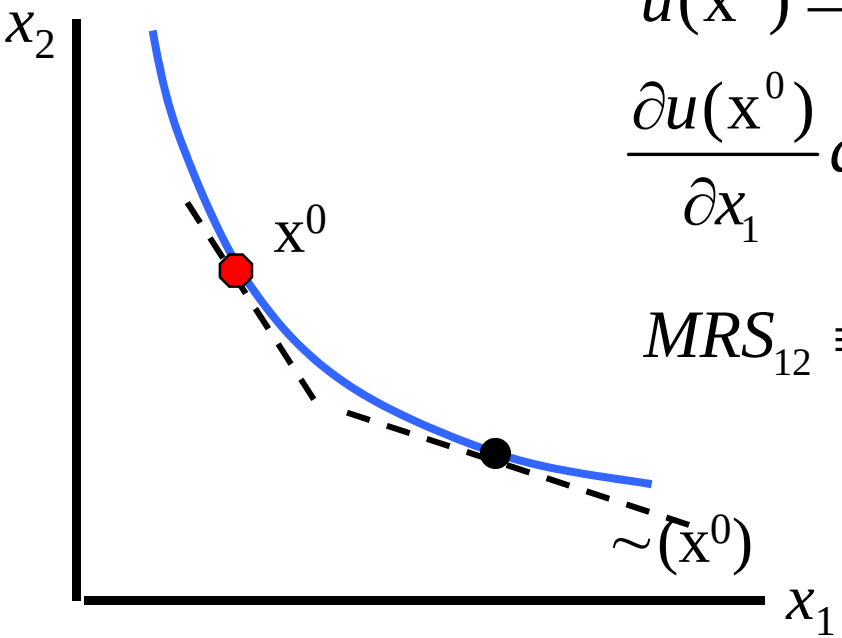
- 定义：$u(\mathrm{x})$: $\mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}$
  - $t^*\cdot \mathrm{e} \in E_A \cap E_B$， $t^*\cdot \mathrm{e} \sim \mathrm{x}^0$
  - $u(\mathrm{x}) \equiv t^*$
  - 连续性→t^* 存在
  - 严格单调性
    → t^*唯一



效用函数

- 效用函数与无差异曲线：
  - $\sim(\mathrm{x}^0)=\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \sim \mathrm{x}^0\}=\{\mathrm{x} \mid u(\mathrm{x})=u(\mathrm{x}^0)\}$
  - $\succsim(\mathrm{x}^0)=\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \succsim \mathrm{x}^0\}=\{\mathrm{x} \mid u(\mathrm{x}) \geq u(\mathrm{x}^0)\}$

——————$u(\mathrm{x})$的上等值集



$$u(\mathrm{x}^0)=\bar{u}$$

$$\frac{\partial u(\mathrm{x}^0)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u(\mathrm{x}^0)}{\partial x_2}dx_2=0$$

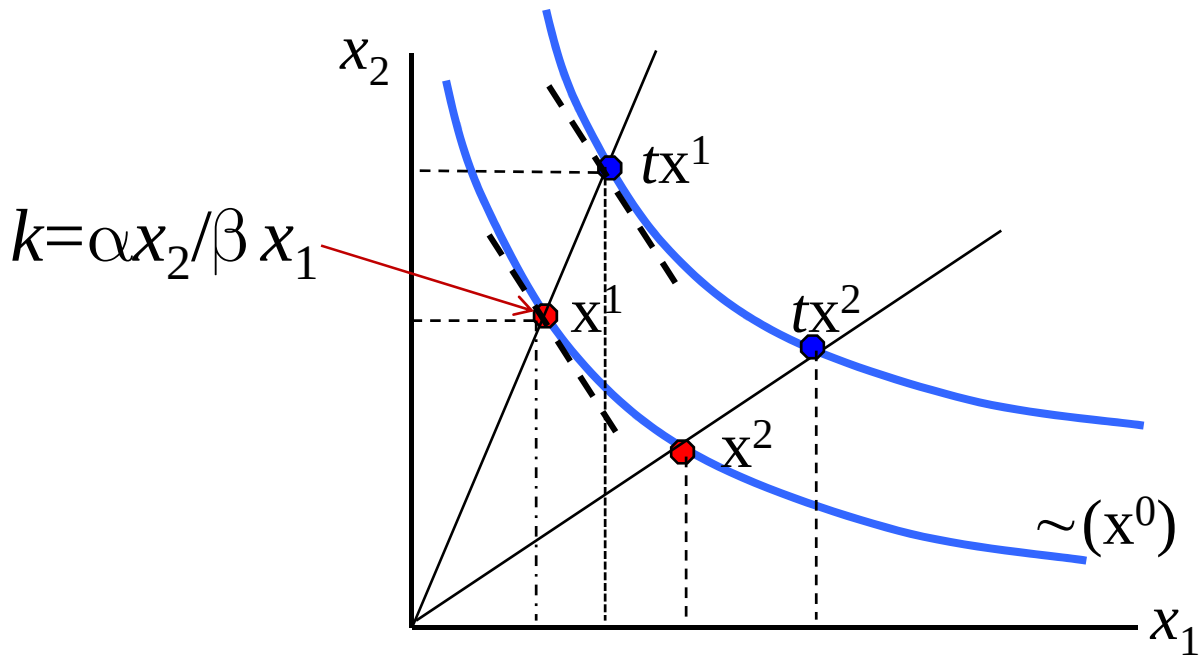
$$MRS_{12}\equiv-\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{u=u_0}=\frac{\partial u(\mathrm{x}^0)/\partial x_1}{\partial u(\mathrm{x}^0)/\partial x_2}$$

效用函数

- 拟凹函数：
  - 如果$f(x)$的上等值集是凸集，那么$f(x)$是拟凹函数
- 给定$u(x)$是表示偏好关系$\succsim$的效用函数
  - 如果偏好满足凸性，那么$u(x)$是拟凹函数
    - $\succsim$ 凸 → $\succsim(x^0)=\{x|x\succsim x^0\}=\{x|u(x)\succsim u(x^0)\}$是凸集
    - → $u(x)$是拟凹函数
  - 如果偏好满足严格凸性，那么$u(x)$是严格拟凹函数

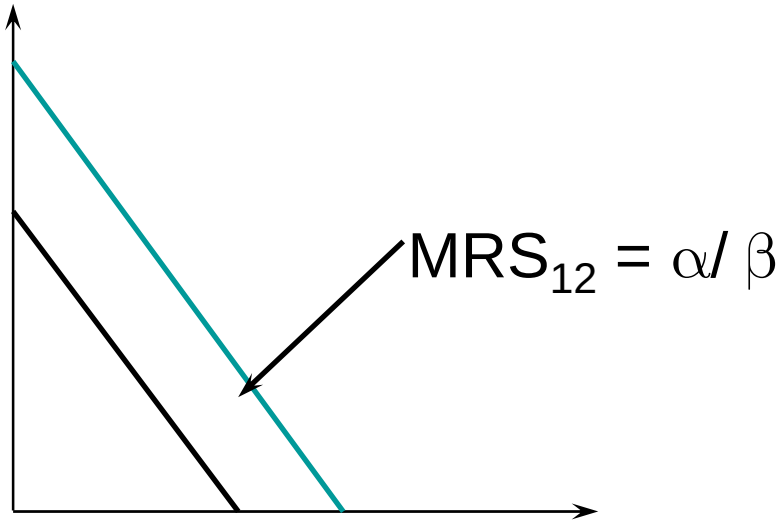
常见效用函数

- 柯布-道格拉斯(C-D)效用函数
  - $u(x_1, x_2)= x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$
  - $MRS_{12}= \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} / \beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}= \alpha x_2/\beta x_1$
  - $\ln [u(x_1, x_2)]= \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$

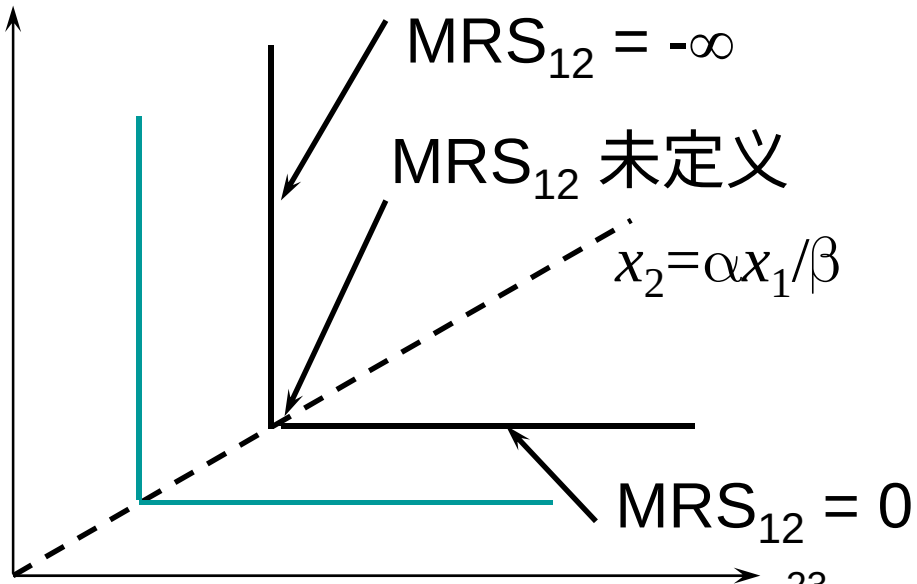


常见效用函数

- 完全替代偏好关系
  - $u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$
  - $MRS_{12} = \alpha / \beta$

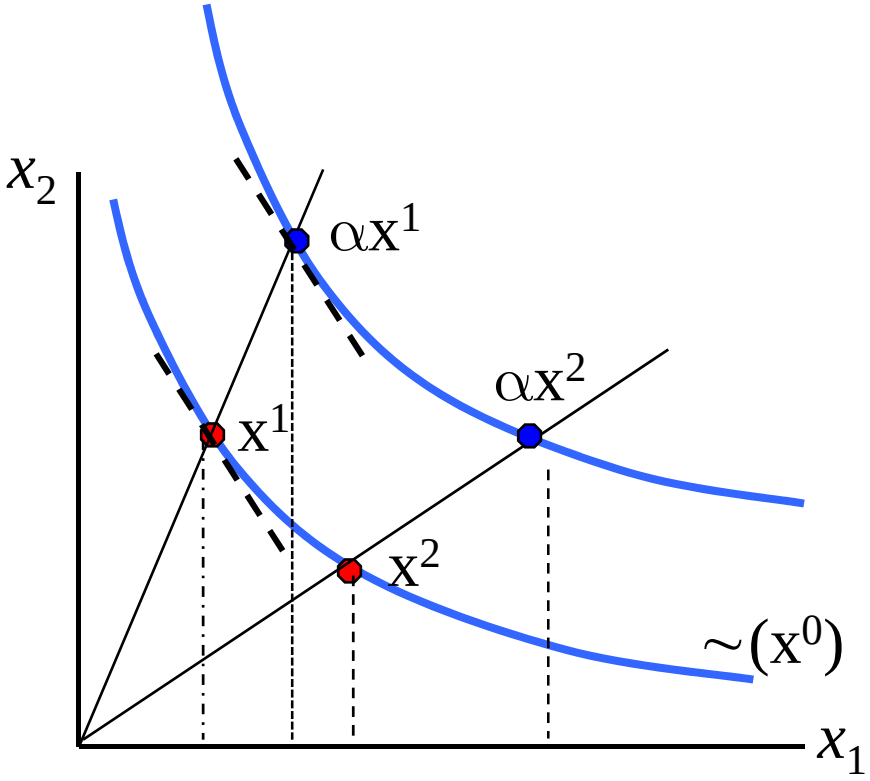


- 完全互补偏好关系
  - $u(x_1, x_2) = \mathrm{Min}\{\alpha x_1, \beta x_2\}$



常见效用函数

- 例：位似偏好(*Homothetic Preferences*)
  - 称偏好关系 $\succsim$ 是位似偏好，如果$x^1 \succsim x^2$，$\forall \alpha \geq 0$,都有 $\alpha x^1 \succsim \alpha x^2$
  - $\succsim_L$
  - $u(x_1, x_2)=x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$，$\alpha, \beta>0$
  - k次齐次函数



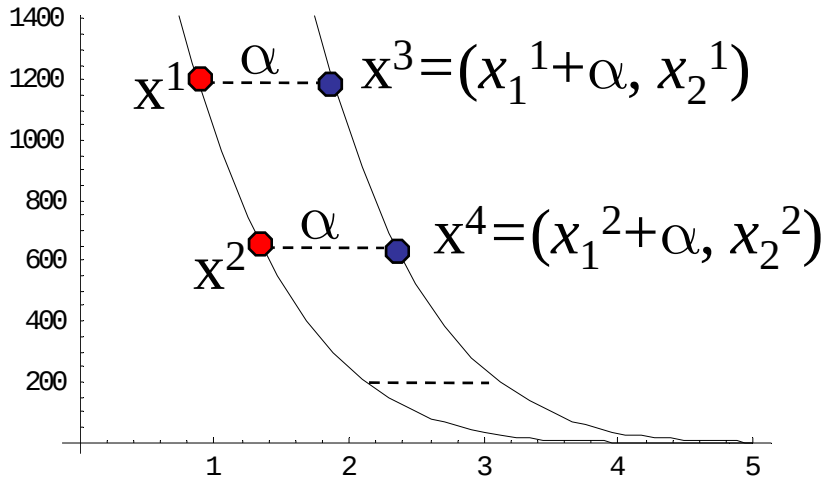
常见效用函数

- 定理：
  - 连续、单调的位似偏好都可以用一个一次齐次效用函数表示。
  - 证明：
    - 由定理1.1的证明得到函数$u(x)=t^*(x)$表示一个连续单调偏好,而且 $x \sim t^*(x)\ e$
    - $\succsim$具有位似性质，所以 $\alpha x \sim \alpha t^*(x)\ e$
    - 所以，根据$u(x)$定义，$u(\alpha x)=\alpha t^*(x)=\alpha u(x)$

常见效用函数

- 例：拟线性偏好(quasilinear preference)
  - 偏好关系 $\succsim$ 是相对于商品1的拟线性偏好，如果 $x^1 \sim x^2$，那么，$\forall \alpha \geq 0$,都有

    $$x^1 + \alpha e_1 \sim x^2 + \alpha e_1 \quad \text{其中 } e_1=(1,0,\ldots,0)$$
  - 拟线性效用函数（二维）
    - $u(x_1, x_2) = v(x_2) + x_1$



定理

连续偏好如果满足强单调性（至少对商品1满足），而且相对于商品1满足拟线性，那么该偏好可以用具有以下形式的效用函数来表示

$$u(\mathrm{x}) = x_1 + v(x_2, \ldots, x_n)$$

- 引理：对任意的$(x_2, \ldots, x_n)$都存在一个实数$v(x_2, \ldots, x_n)$ 满足

$$(0, x_2, \ldots, x_n) \sim (v(x_2, \ldots, x_n), 0, \ldots, 0)$$

- 定理证明：
  - 由引理得到，对于相对于商品具有拟线性的偏好关系，给定任意x，都有

    $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (x_1 + v(x_2, \ldots, x_n), 0, \ldots, 0)$
  - 由“相对于商品1的严格单调性”得到：

    $x_1 + v(x_2, \ldots, x_n)$ 表示偏好$\succsim$。

常见效用函数

- 例: CES效用函数

$$u(x_1, x_2) = [\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}]^{1/\rho}$$

$$1. if\ \rho = 1 \qquad u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$2.\ if\ \rho \to 0 \qquad u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$3.\ if\ \rho \to -\infty \qquad u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

附录1：证明－D1与D2等价

- D1→D2
  - 给定偏好满足D1，令$\{x^n,y^n\}$是一个序列，满足$x^n \succsim y^n$，而且有 $\lim_{n\to\infty} x^n=x$, $\lim_{n\to\infty} y^n=y$。
  - 假设 $x \succsim y$ 不成立，那么有 $y \succ x$.
  - 根据D1，存在领域$B(y)$和$B(x)$，使得所有$z\in B(y)$, $w\in B(x)$都有 $z \succ w$.
  - 当N 足够大时，序列$\{x^n,y^n\}$中所有$n>N$,都有

    $$x^n \in B(x)\ ,\ y^n \in B(y)$$

  - 所以有 $y^n \succ x^n$
  - 与条件矛盾，所以假设不成立。

附录1：证明—D1与D2等价

- D2→D1
  - 给定偏好满足D2，令$x \succ y$，$B(x,r)$ 和$B(y,r)$
  - 假设对任意领域$B(x,r)$ 和$B(y,r)$ ，都存在 $z \in B(y)$, $w \in B(x)$ 使得 $z \succsim w$.
  - 由假设得到存在 $x^n \in B(x,1/n)$, $y^n \in B(y,1/n)$，使得$y^n \succsim x^n$
  - 而且有 $\lim_{n\to\infty} x^n = x$, $\lim_{n\to\infty} y^n = y$。
  - 所以，由D2得到 $y \succsim x$。
  - 与条件矛盾，所以假设不成立

附录2：定理2.3 证明

- Step 1:构造函数 u(x)
  - 令e=(1, 1,…,1)
    - $t \cdot e \in X, \quad \forall \ t \in \mathbb{R}_+$
  - 定义：

    $$A \equiv \{t \geq 0 \mid te \succsim x\} \qquad B \equiv \{t \geq 0 \mid te \precsim x\}$$
  - 由连续性得到 A、B是闭集
  - 由严格单调性得到：
    - A有下界　　（A是有下界闭集）
    - B有上界　　（B是有上界闭集）
  - 所以，A有下确界， B有上确界

    $$A = [\underline{t}, \infty) \qquad B = [0, \overline{t}]$$

附录2：定理2.3证明

- Step 1: 构造函数 $u(\mathrm{x}^0)$
  - 由完备性得到：

$$A \cup B = [0, \bar{t}] \cup [\underline{t}, \infty) = \mathbb{R}_+$$

$$\rightarrow \bar{t} \geq \underline{t} \rightarrow A \cap B \neq \phi$$

$$\Rightarrow \exists\, t^* \in A \cap B$$

$$\Rightarrow t^* \mathrm{e} \sim \mathrm{x}$$

  - 由严格单调性得到：t^*是唯一的.
- 定义： $u(\mathrm{x}^0) \equiv t^*,\ t^* \cdot \mathrm{e} \sim \mathrm{x}^0$ （P.1）

附录2：定理2.3证明

- Step 2: $u(x)$是效用函数
  - $\forall\ x^1, x^2 \in R_+^n$，由定义(P.1)的得到 $u(x^1)$和$u(x^2)$
  - 如果$x^1 \succsim x^2$，
  - 根据$u(x)$定义和偏好的传递性，得到

$$u(x^1)\cdot e \succsim u(x^2)\cdot e$$

  - 由偏好的严格单调性，得到

$$u(x^1) \geq u(x^2)$$

  - $u(x)$是表示偏好关系 $\succsim$ 效用函数

附录3：CES效用函数

$$u(x_1, x_2) = [\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}]^{1/\rho}$$

$$\ln u(x_1, x_2) = \frac{\ln[\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}]}{\rho}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \ln u(x_1, x_2) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln[\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}]}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{[\alpha x_1^{\rho} \ln x_1 + \beta x_2^{\rho} \ln x_2]}{\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \ln x_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \ln x_2$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \to 0} u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

附录3：CES效用函数

$$u(x_1, x_2) = [\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}]^{1/\rho}$$

$$\lim_{\rho \to -\infty} \ln u(x_1, x_2) = \lim_{\rho \to -\infty} \frac{\ln[\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}]}{\rho} \qquad x_1 > 1, x_2 > 1$$

$$= \lim_{\rho \to -\infty} \frac{[\alpha x_1^{\rho} \ln x_1 + \beta x_2^{\rho} \ln x_2]}{\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\rho \to -\infty} \dfrac{[\alpha \ln x_1 + \beta (x_2 / x_1)^{\rho} \ln x_2]}{\alpha + \beta (x_2 / x_1)^{\rho}} = \ln x_1 & \text{if } x_1 \geq x_2 \\ \lim\limits_{\rho \to -\infty} \dfrac{[\alpha (x_1 / x_2)^{\rho} \ln x_1 + \beta \ln x_2]}{\alpha (x_1 / x_2)^{\rho} + \beta} = \ln x_2 & \text{if } x_2 > x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \to -\infty} u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$