

数学中的游戏因素及其对于数学的影响

王幼军

【作者简介】王幼军(1965-)男,上海交通大学科学史系博士生。上海交通大学科学史系,上海 200030

【内容提要】游戏与数学作为两项人类活动具有许多共同的特点,这种共性主要体现在它们的性质、结构以及实践等三个方面。数学与游戏之间的关系是相互渗透、相互统一的关系。游戏的精神一直伴随着数学的成长和发展,成为数学发展的主要动力之一;并从以下几个方面影响了数学的发展;游戏激发了许多重要数学思想的产生,游戏促进了数学知识的传播,游戏是数学人才发现的有效途径。此外,游戏还在数学教育中起着非常重要的作用。

【关键词】数学/游戏/数学发展/数学教育

【正文】

(中图分类号) N94 (文献标识码) A (文章编号) 1000-0763(2002)02-0012-06

一、数学与游戏的关系

一般认为,游戏是一个广泛的概念,它包括任何一种旨在消遣时光或寻求娱乐的活动。而数学则是带有艺术风度的智力工作,同时是具有巨大的实用价值的科学。数学总是和逻辑在一起,数学家在从事研究时一般不是戏谑的,因为严谨和认真是人们对数学的一种追求,游戏对于数学的作用至多起激发兴趣和调节情绪的作用。然而,事实上情况并非那么简单。考察一下数学与游戏的关系,我们发现游戏与数学的关系非常密切。无论从数学知识的本身,还是数学活动的过程,如从事数学活动的人们的动机、方法等方面都可发现游戏的因素。

首先,就数学知识本身来说,在传统数学领域和现代数学领域中都可发现大量赏心悦目的具有游戏性质的内容和问题。在算术中,毕达哥拉斯学派对于完全数和亲和数等数字的奇特性的研究,以及用石块的游戏列出的有趣定理都具有游戏的性质。在代数中,三次方程早已出现在公元前1900-1600年巴比伦的泥板书中,当时并没有实际的问题导致三次方程,显然巴比伦人把这个问题当作消遣。公元前3世纪阿基米德提出“群牛问题”导致包含8个未知数的代数不定方程组。5-6世纪《张丘建算经》中记载的“百鸡问题”导致3元不定方程组。几何学中的游戏趣题更是花样繁多,如由勾股定理所编制的大量趣题、古希腊人研究的角的三等分、倍立方体和化圆为方三大几何作图问题以及对割圆曲线等奇异曲线的研究、用相同形状的图形铺满整个平面的问题,等等。许多深奥的、严肃的数学也带有游戏的情趣。例如,从16世纪以来,在微积分中人们对大量种类的奇形怪状的曲线的研究显然带有娱乐的性质。最早纯粹关于消遣性数学问题的书籍出现于17世纪,其后200年中,数学中的游戏及谜题的种类和数量大增。在此时期人们的兴趣大都集中在数字的奇特性、单纯的几何谜题、算术故事问题、魔(术)方(块)、赌博等游戏。到了19世纪,人们的兴趣开始转向一些现代数学领域,如拓扑学、组合几何、图论、逻辑学、概率论等,其中研究对象性质的奇特性、推理方法的迷惑性、以及各种组合问题和几何图形操作的灵活多变性等都是给人以乐趣的、带有游戏色彩的问题。

其次,数学作为一项人类活动,自古以来一直是一个享有特权的人类智力活动领域,被看成是人类智力的象征。它能使参与者产生情感方面的体验,给人乐趣。因此,许多人不单是因为数学有用而研究数学,他们的出发点则是把数学作为一种自娱自乐的游戏,一种高级的心理追求和精神享受。许多数学思想是人们锲而不舍地思索一个令人迷惑的概念或问题的结果。有些人可以就一些问题和趣题连续工作几个小时,甚至花费几

天、几年的时间去探讨那起初从表面上看来不过是消遣的东西，直至细枝末节，以求得彻底解决。例如，几何学起源于实际的需要，然而几何学的繁荣发展却开始于古希腊。尽管希腊人把几何看作与对于世界本质的思索一样严肃的事，但实际上希腊人却把几何当作智力游戏对待，他们的大部分工作本质上都具有游戏的性质□□远离功利，满足好奇心和求知欲，有闲人的消遣，比如他们把大部分的精力都集中在许多单纯的几何谜题上。可以说数学只是希腊人的一个高级玩具，而并非一个有用的工具。

数学即游戏的观念在19世纪数学变为一种职业以后仍然在发挥作用，实际上这种观念一直持续到现代。在此，引用爱因斯坦于1918年4月所讲的一段意味深长的话：“许多人爱好科学，是因为科学给了他们异乎寻常的智力上的快感，对于这些人科学是一种特殊的娱乐；还有许多人之所以把他们的智力奉献给科学祭坛，为的是纯粹的功利。如果把这两类人都赶出神圣的殿堂，那么，这里的人就会大为减少…”爱因斯坦的这段描述在科学殿堂活跃的人们的话同样也适用于数学。著名数学家哈代曾说：激励数学家做研究的主要动力是智力上的好奇心，是谜团吸引力，正如希尔伯特所说：“问题就在那里，你必须解决它”。正是这种永不满足的激情吸引了大批的人献身于数学，从而导致了大量问题离奇地绽开数学的嫩牙。可以说数学在其成长和发展中一直伴随着游戏的精神。

这种数学即游戏观念并非出于偶然，从本质上作一番考察，我们会发现数学与游戏具有许多共同的特点，它们的关系是相互渗透、相互统一的关系，这种统一主要体现在活动的性质、结构的形式以及实践三个方面。首先，数学与游戏作为两项人类活动具有许多共同的性质特征。有些社会学家曾经对游戏进行了深入的分析，以下性质是游戏的基本特征[1]：

- 1.游戏是一种“自由活动”，“自由”在希腊语中的意思是“无报酬的”，即活动本身是为了锻炼，而不是为了从中获取利益。
- 2.游戏在人类的发展中起着“一定的作用”。幼儿从游戏中丰富情感、获得知识、发展智力和能力，从而为将来的竞争和生活作准备。成年人玩游戏则是为了体验解放、回避和放松、满足好奇心等感觉。
- 3.游戏不是玩笑，作游戏必须相当认真。不认真对待的人是在糟蹋游戏。
- 4.游戏就象艺术工作一样，在深思熟虑、实施以及取得成功的过程中能够得到巨大的乐趣。
- 5.通过游戏规则可以创造一种新秩序和充满和谐韵律的世界。
- 6.游戏有自己独立的时间和空间。……

显然，数学作为一项人类的活动也具有以上所有的特点，从这一点来讲，数学的确是一种游戏。

其次，数学与游戏的系统结构也有共同的形式。数学具有演绎体系或称为公理化系统，这种系统由不加定义的概念（原始概念），不加证明的命题（公理）组成。其中原始概念的含义由公理体现出来。任何游戏在一开始都是介绍一些对象或部件，一系列的规则，这些对象或部件的作用由那些规则所决定。两者的相似是显然的，它们的差异只是叫法不同而已，数学中的不加定义的概念对应着游戏中的对象或部件，公理对应着游戏的规律，数学中的定理则对应着游戏过程中的每一状态。两个系统中都有“定义”，也都有“证明”。例如，以下“字母游戏”的系统可以用数学的语言描述[4]：

不加定义的概念：字母M,I和U。

定义：x指任何由若干I和若干个U组成的字母串。

公理：1)如果字母串的最后一个字母是I，则可在最后加上字母U。

2)如果已有Mx，则可以加上x变为Mxx，此称为加倍法则。

3)如果在字母串中出现三个I相连的情况，即III可用一个U来代替。

4)如果UU出现，则一局结束。

定理：“由MI，必然导出MUIU”

证明：MI□（公理2）MII□（公理2）MIII□（公理1）MIIIU□（公理3）MUIU

正是由于数学与游戏的形式结构的相似，20世纪初数学哲学中形式主义学派的代表人物希尔伯特(D.Hilbert)有一个极端的观点：“数学是根据某些简单规则使用毫无意义的符号在纸上进行的游戏。”

第三，数学与游戏的实践也有共同的特征。任何人在开始做游戏时，都必须对它的规则有一定的了解，将各部件的相互联系弄清楚，就象数学的初学者那样，用同样的方法比较并建立该理论中的基本元素之间的相互作用，这些就是游戏和数学理论的基本练习。无论在数学中还是在游戏中，较深层次的、更复杂的步骤和策略的运用都需要特殊的洞察力。

在玩高级游戏的过程中，总是有问题出现，人们总想要在从未探索过的游戏情境中用首创的方法来解决，这对应于数学理论中未解决的问题的研究。在创造新游戏的过程中，需要设计情境，给出新颖的策略和创造性的游戏方式。将其与创立新的数学理论相类比的话，就相当于提出新颖的思想和方法，并将之应用于其它未解决的问题，从而更深刻地揭示现实生活中某些至今尚不明了的真理。

因此，从广义上来讲，可以说数学是一种游戏，只不过这种游戏要涉及到科学、哲学、艺术等更广泛的人类文化范围。从狭义上说，数学中的游戏是指那些具有娱乐和消遣性质的并带有数学因素的游戏和智力难题。正是由于数学与游戏之间的共性，许多问题和内容很难说是应归于纯数学研究还是归于有趣的智力游戏；更难于区分人们对于数学的兴趣是由于数学中的游戏因素，还是由于数学的其他因素。总之，数学中有游戏的精神，游戏中有数学的思想，要想在两者之间画出一道严格分明的界限是不可能的。

二、游戏对数学发展的影响

既然数学与游戏是如此紧密的联系在一起，因此在某种程度上可以说，游戏精神是数学发展的主要动力之一。人们从事数学活动，就是在进行某种趣味四溢的游戏，数学中的游戏因素给数学带来了无穷的魅力，从而吸引了一代又一代人的目光，大大加速了数学的发展。因而，不论是数学家还是一般的游戏者都促进了数学事业的发展。此外，游戏对数学的发展还表现在另外三个方面：游戏激发了许多重要数学思想的产生，游戏促进了数学知识的传播，游戏是数学人才发现的有效途径。

1.游戏激发了许多重要数学思想的产生。数学史上经常出现这种情况，许多数学思想起源于对于一些令人迷惑不解的问题的锲而不舍地探索，这些问题往往从表面上看来不过是供人消遣的游戏而已，甚至看来与数学的情境毫无关系，然而最后问题的解决却产生令人意想不到的新的数学思想。例如，自古以来，悖论出现在广泛的学科范围，包括文学、科学、数学。不管什么类型的悖论，其中的创造性和令人困惑的推理都充满了趣味和给人异乎寻常的智力上的快感。特别地，数学的悖论不仅可以供人娱乐，而且还是很好的智力练习和发现的乐土，许多数学学科的完善都与悖论有关，如实数理论、微积分、集合论等。可以说数学中几乎每一门学科都或多或少受到游戏精神的激发而得到发展。最典型的例子是概率论、图论和组合数学建立。

概率论直接起源于一个关于赌博的游戏。17世纪，法国的一个名为德·梅勒的职业赌徒针对赌博中常常遇到“怎样合理分配赌注”问题，向著名数学家帕斯卡请教，这个问题常常称为“点子问题”，即两个赌徒中谁先积满一定数目的点谁就赢得一局；如果在一局结束以前离开赌场，他们应该如何分配赌注？帕斯卡和费马在通信中各自解决了这个问题。对于这个问题的解决和研究标志着不同于以往确定性数学的一种崭新的数学方法——概率论的诞生，它把纯粹偶然事件的表面上的无规律性置于规律、秩序和规则之下，从而成为人类的根本知识之一，并具有广泛应用价值。正如拉普拉斯所说：“这门起源于靠运气取胜的游戏的科学，竟然成了人类知识的最重要的一部分”。

图论也是一门起源于游戏的学科，它起源于欧拉关于哥尼斯堡七桥问题的研究。哥尼斯堡是东普鲁士首府，普莱格尔河横贯其中，上有七座桥将河中的两个岛和河岸连接，一个散步者怎样才能走遍七座桥而每座桥只经过一次？当时大多数人都把这当作有趣的娱乐，但是欧拉发现这个问题可以异向一个另外的契机，他抓住了这个契机并加以发展。1735年，欧拉向圣彼得堡科学院提交了一篇论文，欧拉把这个问题的物理背景变换并简化为一种数学设计（称作图或网络）：即把每一块陆地用一个点来代替，将每一座桥用连接相应的两个点的一条线来代替，从而相当于得到一个图。欧拉证明了这个问题没有解。欧拉指出欧几里得几何并不适用于这个问题，因为桥不涉及“大小”，也不能用“量化计算”来解决。相反地，这问题属于“位置几何”

（莱布尼茨描述拓扑学时首先使用的名称）。所以，哥尼斯堡七桥问题的解决远远超出了它的娱乐价值，由此提出的新思想则开辟了数学的一个新的领域——图论。当然游戏娱乐对于图论的作用并没有到此为止，此后

许多著名的数学游戏成为图论和拓扑学发展的催化剂和导引，如哈密尔顿问题（绕行世界问题）、四色猜想等。

另一个与游戏密切相关的学科是组合数学。组合数学是研究任意一组离散性事物按照一定规则安排或配置方法的数学。二十世纪以前，人们主要从游戏的角度来研究组合数学，例如中国的魔方、纵横图、巴歇砵码问题、柯可曼女生问题、欧拉36名军官问题等等。这些问题推动人们去思考，它们的解答也常常是机智和精巧的。在这个过程中，人们得到了组合数学中一般的存在性定理和计数原理，如抽屉原理、母函数方法、递归关系解法、容斥原理等。……

事实上，数学学科中一些最伟大的成就，象射影几何、数论、拓扑学、对策论等无不受到游戏精神的影响。总之，由游戏的精神激发出来的数学对象是无止境的。当人们以自愿而嬉笑的心境，而不是以正式的科学常有的严肃认真的背景来看待一门学科时，这种精神就能使科学有效地取得进展。这是因为在解决和创造智力题或游戏的过程中，人们可以不受传统理论概念或方法论的束缚，完全自由地显示他的想象力和发挥他的创造力。正因为如此，游戏成为严肃数学的出发点，有时成为某些学科产生和发展的催化剂。

2.游戏对于数学的另一作用是促进了数学知识的传播。游戏之所以具有难以抗拒的魅力一个很重要的原因是游戏所涉及的问题和内容有趣迷人、浅显易懂。另外又不需要过多的预备知识，只要掌握一般的基本知识，初学者即可登堂入室，理解某一门学科的许多的重要内容。正像读过几部侦探小说的人会情不自禁地觉是自己已有了足够的本领，可以帮助警方破案一样。因此数学游戏常被用来作为严肃数学的一种表现方式，使之更易理解和更具趣味。游戏在数学普及和传播中的有效性一直伴随数学的成长和发展过程中。在人们津津乐道、相互传诵游戏的过程中，也将有关的数学知识和数学思想传送给四面八方的人。下面是历史上这一倾向的几个典型例子。

成书于公元前1700年的古埃及的阿默士纸草书（也称Rhind纸草书）是为了当时的贵族和祭祀阶层所作的数学普及性的一个问题集（有人说是教科书），其中有些问题是以有趣的歌谣或故事的形式编写而成。因此流传很广，如第79题关于几何级数的加法问题又演变成“我去圣地爱弗斯”等歌谣流传于欧洲几个国家。

欧几里得也在已经失传的一本名为《纠错集》(Pseudaria)的书中使用了一组有趣的谬论，作为激励他的学生进入正确思维过程的手段。阿基米德在他的《数沙粒者》一书开始就说：“过去有个叫吉伦(Gelon)的国王，他认为沙粒的数量是无限的……”，这种以游戏的方式来处理数学的情境的目的就是使他的思想更为人们所理解和接受。

中世纪意大利数学家斐波那契(J.Fibonacci)的《算盘书》是一本广泛流传于欧洲各国的著作，这本书流传的原因除了它的内容实用之外，还因为把数学内容寓于生动有趣的游戏之中，如“兔子繁殖问题”、“蓄水池问题”、“野兔和猎狗”、“七个老妇”等几乎成为家喻户晓、人人皆知的数学游戏。此书唤起了欧洲人对于数学的兴趣和重视，为以后欧洲数学的复兴奠定了基础。

在世界各地都曾经流传一些著名的数学游戏，如古代中国的韩信点兵、百鸡问题、七巧板、大衍求一术（该问题被多种数学著作改头换面地采用）。古印度的莲花问题、蜜蜂问题……

从19世纪末期开始，由于人们意识到游戏在数学知识的普及与传播中的独特的作用，关于数学游戏的收集、编造以及解答等方面的研究受到空前地重视，在众多的研究者中，影响最大的是美国科普作家马丁·加德纳(M.Gardner)的工作，他曾在美国的著名科普杂志《科学美国人》(Scientific American)上主持“数学游戏”专栏。他工作的特点是把许多数学思想或知识寓于各种奇妙有趣的故事和问题之中。这些题目初看似乎很难，有时冥思苦索，百思不得其解，但如果放开思路，打破框框，从各种角度去考虑，也许很快就会有突破，具有“啊啊！灵机一动”的特点。这些妙趣横生的作品使数以百万计的人陶醉于数学乐园之中。以后这些趣题被汇集成册以各种文字出版多次，其影响广泛而又持久。最近，英国数学家康韦(J.H.Conway)等人在所作的《数学游戏获胜的方法》一书中说：“马丁·加德纳比任何人将更多的数学带给了千百万人。”这句话在肯定了马丁·加德纳的贡献的同时，也道破了游戏对于数学传播的有效性。

3.游戏也常常成为数学人才发现的有效途径，从而成为他们进入数学研究的踏脚石。历史上许多数学家是由

于解决了某个游戏难题而发现自己具有数学潜能，从此放弃其他选择而献身数学。高斯在数学史上是与阿基米德、牛顿等人并列的数学家，有“数学王子”之称，他填补了古典数学家遗留的许多空白，而又为现代数学开辟了许多意义深远的新道路。高斯成为数学告别过去走向现代的一个象征。这样一位大数学家以数学为职业却是由于在他19岁那年解决了一个长期困扰数学界的、带有游戏色彩的几何作图难题——用尺规作出了一个正十七边形，这一成功使他对自已的数学才能有更加明确的认识，于是，他毅然放弃自己所喜爱的语言学而投身于数学。

著名的法国概率学家西米尔·泊松(S.D.Poisson)年青时曾经为找到一个适合自己的职业而大伤脑筋，他的父亲要他学医或法律，但他缺少这方面的欲望。正在苦苦寻觅之时，一道趣题使他意识到自己的习性和兴趣倾向于数学方面。以此为开端，他开始了数学研究生涯。一道游戏趣题而成为他一生的转折点[7]。

一般来说，许多具有数学潜能的人往往从小表现出对游戏的迷恋和酷爱，以及在解决方法上的灵活和机智。所以游戏往往成为检测一个人的数学和推理能力的一个标准。如果说上述例子还不足以说明这一点的话，还可以举出许多涉足过游戏的数学家名字：对赌博痴迷终生的意大利数学家卡尔达诺；由魔术师成为20世纪有影响力的美国数理统计学家戴7774康尼斯(Persi Diaconis)；从小就以玩游戏出名的英国数学家康韦(J.H.Conway)、此外还有莱布尼茨、伯努利、哈密尔顿、冯诺伊曼……游戏成为自我检测数学才能的试金石。现在各种数学竞赛中包含许多数学游戏，这种做法实际上也是基于“游戏可用于选拔数学人才”的理念。

三、游戏在数学教育中的作用

古往今来的数学教育的理论和实践都已证明游戏对于数学教育具有极大的价值。对此，马丁·加德纳曾经作了相当正确的评价“唤醒学生的最好的办法是向他们提供有吸引力的数学游戏、智力题、魔术、笑话、悖论、打油诗或那些呆板的教师认为无意义而避开其他东西。”具体说来，游戏在数学教育中的有效性主要表现在以下三个方面：

首先，游戏是数学内容获得的有效方法之一。因为游戏为不同年龄层次的人提供了这样的机会——通过具体的经验去为今后所必须学习的内容作准备。例如折纸的游戏，折纸的对象是一个正方形的纸张，留在正方形的纸张上的折痕揭示出大量几何的对象和性质：相似、轴对称、心对称、全等、相似形、比例、以及类似于几何分形结构的迭代。折纸的过程也极具启发性：开始用一个正方形（二维物体）的纸张来折一个立体（三维物体），如果折出了新的东西，那么折纸的人就把这个立体摊开并研究留在正方形纸上的折痕。这个过程包含了维数的变动。一个二维物体到三维物体，又回到二维，这就跟投影几何的领域发生了关系[3]。

其次，游戏与数学结构的相似性保证了游戏有利于数学思维的培养，从而使学生更深刻地理解数学的精神。例如，计算机游戏可以发展几何的空间感觉和意识；某些棋类或字母游戏提供了公理系统的体验，从而使游戏成为学生从具体过度到抽象数学证明的桥梁。通过游戏也会使学生体会到数学的另一种精神：数学不是一门一成不变的课程，数学知识也不是绝对的真理，“数学是人类心灵的自由创造。”或者说数学思想是人的想象力的虚构物和创造物。数学世界独立于我们的现实世界，尽管它和现实世界以不可思议的对应联系起来，并成为人类认识自然界和认识人类社会自身的有效工具。这正是数学的奇妙所在。

最后，游戏可以培养正确的数学态度。这一点主要体现在两个方面。一方面，游戏是培养好奇心的有效方法之一，这是由游戏的性质决定的——趣味性强、令人兴奋、具有挑战性等。好奇心又为探索数学现象的奥秘提供了强大的动力。如果学生没有对于这门学科的强烈兴趣和探索未知问题的好奇心，那么数学学习将是一项艰苦而缓慢的工作。许多数学家开始对某一问题作研究时，总带着与小孩子玩新玩具一样的兴致，先是带有好奇的惊讶，在神秘被揭开后又有发现的喜悦。

另一方面，游戏还可以培养学生养成乐趣吸取不同的思路、勇于创造的研究态度。许多研究人员都为游戏和不同思路之间的关系之密切提供了大量的事例[3]。例如，一个小女孩玩积木时，可能会尝试着用不同的组合方法来观察把一块积木放在另一块上面时，摆多少块可以不到下来。她边玩边对自己的设想进行判断，充分发挥了她的主动性和创造性。并且，她还可以用从游戏中所获得的思路和方法去解决其他的问题。在游戏时

所用的不同思路就是在为某种任务或问题寻找解决方案,因此,可以说游戏是研究的最高形式。爱因斯坦在1954年说过的一句话就指出了这一点[3]:“要获得最终的或逻辑的概念的愿望,也就是玩一场结果不明的游戏的感情基础。……这种组合游戏看来就是创造性思维的重要表现形式。”

对于数学教育来说,游戏的方法并不能代替一切,但如果在正规严肃的教学方法之外多为学生提供机会参加一些游戏,或至少提供一本好的数学游戏选集,即在教学中掺入游戏的精神,那么精神教育将会起到事半功倍的效果。游戏可以使任何水平的学生都从自己的最佳观测点面对每一个题材。学生除了学到数学的内容,体验数学的思维方式,还可以培养正确的学习态度:不同的思路、创造、动力、兴趣、热情、喜悦……。总之,游戏对数学的教育价值和重要意义是不容忽视的。

四、结语

综上所述我们看到,游戏对于数学的发展产生了重要影响,并在数学教育中起着重要的作用。所以,从理论上探讨数学与游戏的关系对数学的进一步发展乃至当今数学教育研究都具有深刻的启迪作用和借鉴价值。当然应当指出,游戏本身并不是数学的终点,它不能完全取代对所有数学活动的分析,数学是一种多边的人类活动,数学中的游戏娱乐、美学欣赏、哲学思考、实用价值探索等因素是如此紧密地交织在一起,只要拆散和剔除任何一个可能不合我们个人爱好的方面,都将给数学带来不可估量的损失。只有认真研究和总结数学发展中的各种因素,才能客观地、全面地认识和评价数学,从而促进数学事业的研究和发展。

本文中所述的是数学与游戏的关系中的一个方面,即数学中的游戏因素及其对数学发展的影响。还有许多方面有待于去探索和总结,例如数学对于游戏的影响、计算机进入游戏王国及其对于数学的影响,怎样把游戏的方法引入数学教育中,……等等,都是有待于进一步探讨的问题。

(收稿日期)2001年4月16日

【参考文献】

- [1] Miguel de Guzman“数学与游戏”,《数学教育评价研究》,上海教育出版社,1996。
- [2] 张之沧:“科学与游戏—维特根斯坦‘语言游戏说’的启发”,自然辩证法研究,1998.15(8)。
- [3] Don Gernes,"The Rules of the Game",The Mathematics Te-achers,Vol.92.5.
- [4] Rudiger Thiele,"Mathematical Games",Companion Encyclope-dia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,Vol.2,1555-1567.
- [5] David Singmaster,"Recreational Mathematics",Companion E-ncyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,Vol.2,1568-1575.
- [6] (法)让·迪厄多内著,沈永欢译:《当代数学,为了人类心智的荣耀》,上海教育出版社,1999。
- [7] T.Pappas著,陈以鸿译:《数学的奇妙》,上海科技教育出版社,1999。
- [8] T.Pappas著,张远南等译:《数学趣闻集锦》,上海教育出版社,1998。
- [9] 马丁·加德纳著,林自新译:《引人入胜的数学趣题》,上海科技教育出版社,1999。
- [10] 郭凯声编著:《数学游戏》,科学技术文献出版社,1999。
- [11] Donald J.Albers and G.L.Alexanderson,"Mathematical Peo-ple",Boston Basel Stuttgart,1985.
- [12] (美)M.L.汉宁格:“寓数学和科学教育于游戏之中”,外国教育,1988.2。