第 33 卷 第 3 期
Vol. 33 No. 3

西南大学学报(社会科学版)
Journal of Southwest University (Social Sciences Edition)

2007 年 5 月
May, 2007

※

以目的与背景知识为双条件的逻辑 AKC

李 小 五

(西南大学 逻辑与智能研究中心,重庆市 400715)

摘　要:首先,我们构造以目的和背景知识为双条件的条件句系统 AKC,给出它的一些证明论结果。其次,我们引入有序邻域语义,给出描述 AKC 的特征公理和推理规则的框架条件,证明 AKC 相对这些框架条件是框架可靠的。最后,我们证明 AKC 相对这些框架条件也是框架完全的。

关键词:条件句系统;有序邻域语义;框架可靠性;框架完全性

中图分类号:B815.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-2677(2007)03-0095-07

我们要研究一种特定的双条件句 $AB \geqslant C$。在这样的条件句,第 1 个条件 A 表示某个主体 a 的目的,第 2 个条件 B 表示 a 的背景知识,C 表示由此能产生的结果。所以 $AB \geqslant C$ 描述的是 a 的一种活动能力。主体 a 有了一个目的 A,再根据他的背景知识 B 就有能力做完一件事从而产生一个结果 C。因此 $AB \geqslant C$ 的直观意义是"主体 a 根据目的 A 和背景知识 B 能得到结果 C"。所以这样的句子应该是模态句。

我们知道,一般情况下,背景知识是一个(可以是无穷的)公式集。但这里为了简单,我们把背景知识看作是有穷集 β,从而用 B 来表示 $\wedge\beta$,即 B 是 β 中所有公式的一个合取。

我们可以把 β 很自然地推广到无穷,从而 β 中所有公式的一个合取 $\wedge\beta = B$ 是无穷逻辑语言中的一个公式。因此我们下面建立的逻辑也可以很自然推广到相应的无穷逻辑。

为了简单,本文我们只研究单主体的关于目的与背景知识的逻辑,将来我们另外撰文将此推广到多主体的关于目的与背景知识的逻辑。

一、形式系统及其证明论

本文提到但未定义的概念和记号,请参见李小五和刘壮虎的论述[1][2]。

定义 1.1　形成规则

(1)我们总用 A, B, C 和 D(加或不加下标)表示公式,其形成规则如下:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid AB \geqslant C。$$

(2)所有公式的集合记为 Form。Form 也称为双条件句语言。

(3)$AB \geqslant C$ 称为双条件句,其中 A 和 B 分别称为此句的第一前件和第二前件,C 称为此句的后件。⊣

规定与缩写 1.2

(1)联结符 ∨,→和↔定义如通常。

(2)为了叙述方便,我们规定联结符的结合力从左到右依次减弱:

$$\neg, \wedge, \vee, \geqslant, \rightarrow, \leftrightarrow。$$

(3)⊥和⊤分别表示某个固定的常假式和常真式。

(4)我们常用符号⇔表示"当且仅当",用⇒表示"若…,则…"。⊣

定义 1.3

以目的和背景知识为双条件的条件句系统 AKC 定义如下:

公理(模式):

(TA)　所有重言式的代入特例,

($CTR_{\geqslant}$) $(AB \geqslant C) \wedge (AC \geqslant D) \rightarrow AB \geqslant D$,

($CC_{\geqslant}$) $(AB \geqslant C_1) \wedge (AB \geqslant C_2) \rightarrow AB \geqslant C_1 \wedge C_2$,

($CA_{\geqslant}$) $(A_1 B \geqslant C) \wedge (A_2 B \geqslant C) \rightarrow (A_1 \vee A_2) B \geqslant C$,

($CB_{\geqslant}$) $(AB_1 \geqslant C) \wedge (AB_2 \geqslant C) \rightarrow A(B_1 \vee B_2)$

※ 收稿日期:2006-07-06

作者简介:李小五(1955-),男,河北涞水人,西南大学逻辑与智能研究中心,兼职教授;中山大学逻辑与认知研究所,教授,博士生导师,主要研究逻辑学。

基金项目:教育部人文社科研究基地重大项目"归纳逻辑及其应用"(05JJD720.40001),项目负责人:李小五。

$\geqslant C$，

（$CMP_{\geqslant}$） $(AB\geqslant C)\wedge A\wedge B\rightarrow C$，

（$ID_{\perp\top\geqslant}$） $\perp\top\geqslant\perp$。

推理规则：

（MP） $A, A\rightarrow C/C$，

（$RAE_{\geqslant}$） $A_1\leftrightarrow A_2/A_1B\geqslant C\leftrightarrow A_2B\geqslant C$，

（$RBM_{\geqslant}$） $B\rightarrow B_0/AB_0\geqslant C\rightarrow AB\geqslant C$，

（$RCM_{\geqslant}$） $C_0\rightarrow C/AB\geqslant C_0\rightarrow AB\geqslant C$。⊣

说明：

（1）由 TA 和 MP 构成的系统称为经典句子系统，记为 **PC**。我们也用 $\mathbf{PC}_0$ 表示用不含$\geqslant$的语言表述的 **PC**。

（2）$CTR_{\geqslant}$称为传递公理。

（3）$CC_{\geqslant}$称为结果合取公理。

（4）$CA_{\geqslant}$称为目的析取公理，$CB_{\geqslant}$称为背景知识析取公理。

（5）$CMP_{\geqslant}$可以称为真目的公理（目的已实现公理）。

（6）$ID_{\perp\top\geqslant}$可以称为无目的公理。无目的导致无结果。$ID_{\perp\geqslant}$相当于

$$(A\wedge\neg A)\top\geqslant A\wedge\neg A,$$

所以它也刻画了矛盾目的导致矛盾结果的情况。这个公理很自然。若我们把它概括为

$$(ID_{\perp\geqslant})\quad \perp B\geqslant\perp,$$

则它还是比较自然的。但通常知识总是真的，所以我们在本系统采用 $ID_{\perp\top\geqslant}$（另一个原因是技术上的：采用 $ID_{\perp\top\geqslant}$而不是 $ID_{\perp\geqslant}$能大大简化框架完全性的证明）。若把 $ID_{\perp\top\geqslant}$概括为

$$(ID_{\geqslant})\quad AB\geqslant A,$$

则我们感到不自然。$ID_{\geqslant}$表示主体心想事成。这样的主体应该是全能的。

（7）$RAE_{\geqslant}$称为目的等价置换规则。

（8）$RBM_{\geqslant}$称为背景知识反单调规则。例如，由它易得

$$(\%)\ AB\geqslant C\rightarrow A(B\wedge D)\geqslant C。$$

（%）的直观意义是：若主体 a 以目的 A 和背景知识 B 为条件能得到结果 C，则 a 以目的 A 和增加了的背景知识 $B\wedge D$ 为条件仍能得到结果 C。但（%）的一个特例是

$$AB\geqslant C\rightarrow A(B\wedge\neg B)\geqslant C。$$

这个公式看起来并不自然。这里的问题本质上来自实质蕴涵怪论，要消解它就要修改或取消 $RBM_{\geqslant}$，但这是我们另一篇论文要研究的问题。

（9）$RCM_{\geqslant}$称为结果单调规则。这条规则是很自然的。

（10）上述除 TA 以外的公理都称为 **AKC** 的特征公理，除 MP 和 $RAE_{\geqslant}$以外的规则都称为 **AKC** 的特征规则。

定义 1.4

（1）我们用 $\vdash A$ 表示 A 是 **AKC** 的内定理：A 在 **AKC** 中有一个形式证明。

（2）**AKC** 的全体内定理的集合记为 Th（**AKC**）。

（3）我们也用$\nvdash A$ 表示 $A\notin$ Th（**AKC**）。

（4）称 $A_1,\cdots,A_n/C$ 是 **AKC** 的导出规则，当且仅当，在 **AKC** 中有一个从 $A_1,\cdots,A_n$ 到 C 的形式推演 $A_1,\cdots,A_n\vdash C$。⊣

引理 1.5

下面是 **AKC** 的内定理和导出规则：

（1）$B_0\leftrightarrow B/AB_0\geqslant C\leftrightarrow AB\geqslant C$，

（2）$AB\geqslant C_1\wedge C_2\rightarrow(AB\geqslant C_1)\wedge(AB\geqslant C_2)$，

（3）$C_0\leftrightarrow C/AB\geqslant C_0\leftrightarrow AB\geqslant C$，

（4）$AB\geqslant C\wedge D\rightarrow A(B\wedge C)\geqslant D$。

证明：

我们只给出证明的主要步骤和主要根据。请读者自行补充细节。

（1）据 $RBM_{\geqslant}$。

（2）—（3）据 $RCM_{\geqslant}$。

（4）

① $B\wedge C\rightarrow B$ TA

② $AB\geqslant C\wedge D\rightarrow A(B\wedge C)\geqslant C\wedge D$ ①，$RBM_{\geqslant}$

③ $C\wedge D\rightarrow D$， TA

④ $A(B\wedge C)\geqslant C\wedge D\rightarrow A(B\wedge C)\geqslant D$ ③，$RCM_{\geqslant}$。

⑤ $AB\geqslant C\wedge D\rightarrow A(B\wedge C)\geqslant D$ ②，③。⊣

下面我们研究 **AKC** 与 $\mathbf{PC}_0$ 的关系。我们要证明前者是后者的协调概括，或者说前者可以协调地退化为后者。

定义 1.6

（1）定义从语言 Form 到不含$\leqslant$的子语言 $Form_0\subseteq Form$ 的翻译映射 t 如下：

$t(p)=p$，对所有原子公式 p；

$t(\neg A)=\neg t(A)$；

$t(A\wedge B)=t(A)\wedge t(B)$；

$t(AB\geqslant C)=t(A)\rightarrow t(C)$。

（2）对每一公式 $A\in Form$，我们称 t(A)是 A 的 t-翻译。⊣

说明：

据上面的定义，易证

$t(A\vee B)=t(A)\vee t(B)$，

$t(A\rightarrow B)=t(A)\rightarrow t(B)$，

$t(A\leftrightarrow B)=t(A)\leftrightarrow t(B)$。

定义 1.7

令 S 和 T 是任意两个公理化系统。

我们称 **S** 能 t-退化为 **T**，当且仅当 **S** 的所有内定理都能 t-翻译为 **T** 的内定理。⊣

定理 1.8

AKC 能 t-退化为 PC_0。

证明：

易见公理 TA 和规则 MP 的 t-翻译仍是重言式的代入特例和分离规则，而且它们只涉及 $Form_0$ 中的公式。

$CTR_{\geqslant}$ 的 t-翻译形如：其中 $\alpha, \gamma, \delta \in Form_0$，

$(\alpha \to \gamma) \wedge (\alpha \to \delta) \to (\alpha \to \delta)$。

$CC_{\geqslant}$ 的 t-翻译形如：其中 $\alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in Form_0$，

$(\alpha \to \gamma_1) \wedge (\alpha \to \gamma_2) \to (\alpha \to \gamma_1 \wedge \gamma_2)$。

$CA_{\geqslant}$ 的 t-翻译形如

$(\alpha_1 \to \gamma) \wedge (\alpha_2 \to \gamma) \to (\alpha_1 \vee \alpha_2 \to \gamma)$。

$CB_{\geqslant}$ 的 t-翻译形如

$(\alpha \to \gamma) \wedge (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$。

$CMP_{\geqslant}$ 的 t-翻译形如

$(\alpha \to \gamma) \wedge \alpha \wedge \beta \to \gamma$。

$ID_{\perp\top\geqslant}$ 的 t-翻译形如

$\perp \to \perp$。

$RAE_{\geqslant}$ 的 t-翻译形如

$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 / (\alpha_1 \to \gamma) \leftrightarrow (\alpha_2 \to \gamma)$。

$RBM_{\geqslant}$ 的 t-翻译形如

$\beta \to \beta_0 / (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$。

$RCM_{\geqslant}$ 的 t-翻译形如

$\gamma_0 \to \gamma / (\alpha \to \gamma_0) \to (\alpha \to \gamma)$。

据上面的结果，易见

(1)若 A 是 AKC 的公理，则 A 的 t-翻译是 PC_0 的内定理；

(2)若 R 是 AKC 的规则，则 R 的 t-翻译是 PC_0 的导出规则。

由此我们证明：

(3)若 A 是 AKC 的内定理，则 A 的 t-翻译是 PC_0 的内定理。┤

定义 1.9

称公理化系统 S 是协调系统，当且仅当不存在 A 使得 A 和 $\neg$A 都是 S 的内定理。┤

定理 1.10

AKC 是协调的。

证明：

假设 AKC 不协调，则存在 A 使得 A 和 $\neg$A 都是 AKC 的内定理，则据上面的定理，t(A)和 $\neg$t(A)都是 PC_0 的内定理，矛盾于 PC_0 的协调性。┤

二、有序邻域语义和可靠性定理

定义 2.1

任给集合 X，我们用 P(X)表示 X 的幂集。

(1)称二元组 F=⟨W, N⟩是有序邻域框架，简称 F 是 ON-框架，当且仅当

① W 是非空的可能世界集，

② 邻域映射 N 是从 W 到 P(P(W)×P(W)×P(W))中的一元映射。

(2)称三元组 M=⟨W, N, [ ]⟩是有序邻域模型，简称 M 是 ON-模型，当且仅当⟨W, N⟩是 ON-框架且

③ [ ]是从全体句符到 P(W)的指派映射。

(3)[ ]也称为框架⟨W, N⟩上的指派映射。┤

定义 2.2　真值集定义

令 M=⟨W, N, [ ]⟩是 ON-模型。

对每一复合公式 A，定义 A 相对 M 的真值集[A]如下：对任意 w∈W，

(1)w∈[$\neg$A]⇔ w∉[A]，

(2)w∈[A∧B]⇔w∈[A]且 w∈[B]，

(3)w∈[AB≥C]⇔⟨[A],[B],[C]⟩∈N(w)。┤

说明：

基于框架定义的模型和定义复合公式的真值集，两者合在一起称为语义，因为由此我们可以在任何一个模型的任意可能世界中对任何一个公式赋予一个意义(真值)。

上面给出的语义称为有序邻域语义。

定义 2.3

(1)称 ON-框架 F=⟨W, N⟩是以目的与背景知识为双条件的框架，简称 F 是 akc-框架，当且仅当下列框架条件成立：对任意 w∈W 和 $X, Y, Z, U, Z_1, Z_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \subseteq W$，

$(ctr_{\geqslant})$ ⟨X, Y, Z⟩∈N(w)且⟨X, Z, U⟩∈N(w)

⇒⟨X, Y, U⟩∈N(w)，

$(cc_{\geqslant})$ ⟨X, Y, Z_1⟩∈N(w)且⟨X, Y, Z_2⟩∈N(w)

⇒⟨X, Y, $Z_1 \cap Z_2$⟩∈N(w)，

$(ca_{\geqslant})$ ⟨X_1, Y, Z⟩∈N(w)且⟨X_2, Y, U⟩∈N(w)

⇒⟨$X_1 \cup X_2$, Y, Z⟩∈N(w)，

$(cb_{\geqslant})$ ⟨X, Y_1, Z⟩∈N(w)且⟨X, Y_2, Z⟩∈N(w)

⇒⟨X, $Y_1 \cup Y_2$, Z⟩∈N(w)，

$(cmp_{\geqslant})$ ⟨X, Y, Z⟩∈N(w)且 w∈X∩Y⇒w∈Z，

$(id_{\perp\top\geqslant})$ ⟨∅, W, ∅⟩∈N(w)，

$(rbm_{\geqslant})$ $Y \subseteq Y_0$ 且⟨X, Y_0, Z⟩∈N(w)

⇒⟨X, Y, Z⟩∈N(w)，

$(rcm_{\geqslant})$ $Z_0 \subseteq Z$ 且⟨X, Y, Z_0⟩∈N(w)

⇒⟨X, Y, Z⟩∈N(w)。

(2)所有的 akc-框架的类记作 Frame(akc)。┤

定义 2.4　有效性定义

令 F=⟨W, N⟩是 ON-框架，M=⟨W, N, [ ]⟩是 ON-模型。

(1)我们称 A 在 M 中有效，记为 M⊨A，当且仅当[A]=W；否则称 A 在 M 中不有效，记为 M⊭A。

(2)称 A 在 F 中有效，记为 F⊨A，当且仅当，对 F 上的任意指派映射[ ]，有[A]=W；否则称 A 在 F 中不有效，记为 F⊭A。

(3)称规则 $A_1, \cdots, A_n/C$ 相对 M 保持有效性，当

且仅当，若$[A_1]=\cdots=[A_n]=W$，则$[C]=W$。⊣

引理 2.5

令 $M=\langle W, N, [\ ]\rangle$ 是 ON-模型。则

(1) $[\neg A]=W-[A]$，

$[A\wedge B]=[A]\cap[B]$，

$[A\vee B]=[A]\cup[B]$，

$[\bot]=\emptyset$，$[\top]=W$。

(2) $[A]\cap[A\to B]\subseteq[B]$。

(3) $[A\to B]=W\Leftrightarrow[A]\subseteq[B]$。

(4) $[A\leftrightarrow B]=W\Leftrightarrow[A]=[B]$。⊣

定义 2.6

(1)称系统 S 相对框架类 C 是框架可靠系统，当且仅当，S 的内定理在 C 的所有框架中有效。

(2)称系统 S 相对框架类 C 是框架完全系统，当且仅当，在 C 的所有框架中有效的公式是 S 的内定理。⊣

定理 2.7　框架可靠性定理

AKC 相对框架类 Frame(akc)是可靠的。

证明：

任给 akc-框架 $F=\langle W, N\rangle$ 和 F 上赋值$[\ ]$。

下面验证 AKC 的公理相对 $M=\langle F, [\ ]\rangle$ 有效且 AKC 的推理规则相对 M 保持有效性。

验证公理 TA 和规则 MP：显然。

验证公理 $CTR_{\geqslant}$：

任给 $w\in[(AB\geqslant C)\wedge(AC\geqslant D)]$。则 $\langle[A],[B],[C]\rangle\in N(w)$，$\langle[A],[C],[D]\rangle\in N(w)$。

据定义 2.3 的($ctr_{\geqslant}$)，我们有

$\langle[A],[B],[D]\rangle\in N(w)$。

据 2.2(3)，有 $w\in[AB\geqslant D]$。再据 2.5，有

$w\in[(AB\geqslant C)\wedge(AC\geqslant D)\to AB\geqslant D]$。

验证公理 $CC_{\geqslant}$：

任给 $w\in[(AB\geqslant C_1)\wedge(AB\geqslant C_2)]$。则 $\langle[A],[B],[C_1]\rangle\in N(w)$，$\langle[A],[B],[C_2]\rangle\in N(w)$。

据定义 2.3 的($cc_{\geqslant}$)，我们有

$\langle[A],[B],[C_1]\cap[C_2]\rangle\in N(w)$。

据引理 2.5，我们有

$\langle[A],[B],[C_1\wedge C_2]\rangle\in N(w)$。

所以我们有 $w\in[AB\geqslant C_1\wedge C_2]$。

验证公理 $CA_{\geqslant}$：

任给 $w\in[(A_1B\geqslant C)\wedge(A_2B\geqslant C)]$。则 $\langle[A_1],[B],[C]\rangle\in N(w)$，$\langle[A_2],[B],[C]\rangle\in N(w)$。

据定义 2.3 的($ca_{\geqslant}$)，我们有

$\langle[A_1]\cup[A_2],[B],[C]\rangle\in N(w)$。

据引理 2.5，我们有

$\langle[A_1\vee A_2],[B],[C]\rangle\in N(w)$。

所以我们有 $w\in[(A_1\vee A_2)B\geqslant C]$。

验证公理 $CB_{\geqslant}$：

任给 $w\in[(AB_1\geqslant C)\wedge(AB_2\geqslant C)]$。则 $\langle[A],[B_1],[C]\rangle\in N(w)$，$\langle[A],[B_2],[C]\rangle\in N(w)$。

据定义 2.3 的($cb_{\geqslant}$)，我们有

$\langle[A],[B_1]\cup[B_2],[C]\rangle\in N(w)$。

据引理 2.5，我们有

$\langle[A],[B_1\vee B_2],[C]\rangle\in N(w)$。

所以我们有 $w\in[(A_1\vee A_2)B\geqslant C]$。

验证公理 $CMP_{\geqslant}$：

任给 $w\in[(AB\geqslant C)\wedge A\wedge B]$。则 $\langle[A],[B],[C]\rangle\in N(w)$，$w\in[A\wedge B]=[A]\cap[B]$。

据定义 2.3 的($cmp_{\geqslant}$)，有 $w\in[C]$。所以我们有

$w\in[(AB\geqslant C)\wedge A\wedge B\to C]$。

验证公理 $ID_{\bot\top\geqslant}$：

任给 $w\in W$，据定义 2.3 的($id_{\bot\top\geqslant}$)，我们有

$\langle\emptyset, W, \emptyset\rangle\in N(w)$。

所以据引理 2.5，我们有 $w\in[\bot\top\geqslant\bot]$。

验证规则 $RAE_{\geqslant}$：

设$[A_1\leftrightarrow A_2]=W$。据 2.5(4)，有

(#)$[A_1]=[A_2]$。

任给 $w\in W$，我们有

$w\in[A_1B\geqslant C]\Leftrightarrow\langle[A_1],[B],[C]\rangle\in N(w)$ 据 2.2

$\Leftrightarrow\langle[A_2],[B],[C]\rangle\in N(w)$ 据(#)

$\Leftrightarrow w\in[A_2B\geqslant C]$　据 2.2。

因此据 w 的任意性，有

$[A_1B\geqslant C]=[A_2B\geqslant C]$，

据 2.5(4)，我们有

$[A_1B\geqslant C\leftrightarrow A_2B\geqslant C]=W$。

验证规则 $RBM_{\geqslant}$：

设$[B\to B_0]=W$。据 2.5(3)，有

(#)$[B]\subseteq[B_0]$。

任给 $w\in W$，我们有

$w\in[AB_0\geqslant C]\Leftrightarrow\langle[A],[B_0],[C]\rangle\in N(w)$ 据 2.2

$\Rightarrow\langle[A],[B],[C]\rangle\in N(w)$

据(#)和 2.3 的($rbm_{\geqslant}$)

$\Leftrightarrow w\in[AB\geqslant C]$　据 2.2。

因此据 w 的任意性，有

$[AB_0\geqslant C]\subseteq[AB\geqslant C]$，

据 2.5(3)，我们有

$[AB_0\geqslant C\to AB\geqslant C]=W$。

验证规则 $RCM_{\geqslant}$：

设$[C_0\to C]=W$。据 2.5(3)，有

(#)$[C_0]\subseteq[C]$。

任给 $w\in W$，我们有

$w\in[AB\geqslant C_0]\Leftrightarrow\langle[A],[B],[C_0]\rangle\in N(w)$ 据 2.2

$\Rightarrow\langle[A],[B],[C]\rangle\in N(w)$

据(#)和 2.3 的($rcm_{\geqslant}$)

$\Leftrightarrow w\in[AB\geqslant C]$　　据 2.2。

因此据 w 的任意性，有

$[AB\geqslant C_0]\subseteq[AB\geqslant C]$，

据 2.5(3)，我们有

$[AB\geqslant C_0\rightarrow AB\geqslant C]=W$。⊣

三、完全性定理

定义 3.1

令 w 是公式集。

(1)称 w 是一致集，当且仅当对所有有穷序列 $A_1,\cdots, A_n\in w$，有

$\nvdash\neg(A_1\wedge\cdots\wedge A_n)$。

(2)称 w 是极大集，当且仅当对所有 $A\in$ Form，$A\in w$ 或 $\neg A\in w$。

(3)称 w 是极大一致集，当且仅当 w 既是一致的又是极大的。

(4)称 **AKC** 是一致系统，当且仅当 Th(**akc**)是一致的。⊣

引理 3.2

AKC 是一致的。

证明：

假设 **AKC** 不一致。则 Th(**AKC**)不一致，所以存在有穷序列 $A_1,\cdots, A_n\in$ Th(**AKC**)使得

$\vdash\neg(A_1\wedge\cdots\wedge A_n)$。

另一方面，因为 $A_1,\cdots, A_n\in$ Th(**AKC**)，所以易证

$\vdash A_1\wedge\cdots\wedge A_n$。

据定义 1.9，**AKC** 不是协调的，矛盾于 1.10。⊣

因为 **AKC** 是 **PC** 的扩充，所以如通常证明，我们有下列结果。

引理 3.3

令 w 是极大一致集。

(1)$\neg A\in w\Leftrightarrow A\notin w$，

$A\wedge B\in w\Leftrightarrow A\in w$ 且 $B\in w$，

$A\vee B\in w\Leftrightarrow A\in w$ 或 $B\in w$，

$A\in w$ 且 $\vdash A\rightarrow B\Rightarrow B\in w$，

$A\in w$ 且 $A\rightarrow B\in w\Rightarrow B\in w$。

(2)Th(**AKC**)$\subseteq$w。

(3)若$\nvdash A$，则存在极大一致集 u 使得 $A\notin u$。⊣

定义 3.4

$|A|=\{w: w$ 是极大一致集使得 $A\in w\}$。⊣

引理 3.5

(1)$|\neg A|=W-|A|$，

其中 W 是所有极大一致集的集合，

$|A\wedge B|=|A|\cap|B|$，

$|A\vee B|=|A|\cup|B|$，

$|\bot|=\varnothing$，$|\top|=W$。

(2)$|A|\cap|A\rightarrow B|\subseteq|B|$。

(3)$|A\rightarrow B|=W\Leftrightarrow|A|\subseteq|B|\Leftrightarrow\vdash A\rightarrow B$。

(4)$|A\leftrightarrow B|=W\Leftrightarrow|A|=|B|\Leftrightarrow\vdash A\leftrightarrow B$。

证明：

据上一引理易证。⊣

定义 3.6

(1)定义 **AKC** 的典范框架 $N=\langle W, N\rangle$ 如下：

① $W=\{w: w$ 是极大一致集$\}$，

② N 是从 W 到 $P(P(W)\times P(W)\times P(W))$中的映射使得：对任意 $w\in W$ 和公式 A，B 和 C，

$\langle|A|, |B|, |C|\rangle\in N(w)\Leftrightarrow AB\geqslant C\in w$。

(2)定义 **AKC** 的典范模型 $M=\langle W, N, [\ ]\rangle$ 如下：$\langle W, N\rangle$是 **AKC** 的典范框架，且

③ $[p]=|p|$，对每一原子公式 p。⊣

说明：

据引理 3.2，**AKC** 是一致的，所以 W 非空。

定理 3.7　典范模型基本定理

令 $M=\langle W,N,[\ ]\rangle$是如上定义的 **AKC** 的典范模型。任给 $w\in W$ 和公式 D，

(1)$D\in w\Leftrightarrow w\in[D]$，

(2)$|D|=[D]$。

证明：

(2)从(1)易得，我们只须证(1)。

施归纳于 D 的结构。

原子公式的情况据上一定义的③。

布尔联结词$\neg$和$\wedge$的情况如通常所证。

令 $D=AB\geqslant C$。所以

$w\in[D]\Leftrightarrow w\in[AB\geqslant C]$

$\Leftrightarrow\langle[A], [B], [C]\rangle\in N(w)$ 据 2.2

$\Leftrightarrow\langle|A|, |B|, |C|\rangle\in N(w)$ 据归纳假设

$\Leftrightarrow AB\geqslant C\in w$　　　　据 3.6②

$\Leftrightarrow D\in w$。⊣

定理 3.8

令 M 是 **AKC** 的典范模型。则

$M\models A\Leftrightarrow\vdash A$，对每一公式 A。

证明：

$\vdash A\Leftrightarrow|A|=W$　　据引理 3.3(2)—(3)

$\Leftrightarrow[A]=W$　　据上一定理

$\Leftrightarrow M\models A$　　据有效性定义 2.4。⊣

定义 3.9

(1)定义 **AKC** 的适当结构(proper structure) $M=\langle W,N,[\ ]\rangle$如下。

(a)$W=\{w: w$ 是极大一致集$\}$；

(b)对所有 $w\in W$，N(w)是下列集合

$\{\langle|A|,Y,Z\rangle: AB\geqslant C\in w$ 使得 $Y\subseteq|B|$ 且 $|C|\subseteq Z\}$；

(c)$[p]=|p|$，对每一句符 p。

(2)$F=\langle W,N\rangle$称为 **AKC** 的适当框架。⊣

引理 3.10

令 $M = \langle W, N, [\ ]\rangle$ 是 AKC 的适当结构。则 M 是 AKC 的典范模型。

证明：

据定义 3.6，只须证：

(1) $\langle |A|, |B|, |C|\rangle \in N(w) \Leftrightarrow AB \geqslant C \in w$，

对任意 $w \in W$ 和公式 A，B 和 C。

"$\Leftarrow$"：设 $AB \geqslant C \in w$。因为 $|B| \subseteq |B|$ 且 $|C| \subseteq |C|$，所以据 N(w) 的构造，有

$$\langle |A|, |B|, |C|\rangle \in N(w)。$$

"$\Rightarrow$"：设 $\langle |A|, |B|, |C|\rangle \in N(w)$。因为等价类的代表元不是唯一的，所以据 N(w) 的构造，

(2) 存在 $A_0B_0 \geqslant C_0 \in w$ 使得 $|A_0| = |A|$，$|B| \subseteq |B_0|$ 且 $|C_0| \subseteq |C|$。

据引理 3.5，有

$$\vdash A_0 \leftrightarrow A, \vdash B \rightarrow B_0, \vdash C_0 \rightarrow C。$$

据 $\vdash A_0 \leftrightarrow A$ 和 $RAE_{\geqslant}$，有

$$\vdash A_0B_0 \geqslant C_0 \leftrightarrow AB_0 \geqslant C_0。$$

再据 $\vdash B \rightarrow B_0$ 和 $RBM_{\geqslant}$，有

$$\vdash A_0B_0 \geqslant C_0 \rightarrow AB \geqslant C_0。$$

再据 $\vdash C_0 \rightarrow C$ 和 $RCM_{\geqslant}$，有

$$\vdash A_0B_0 \geqslant C_0 \rightarrow AB \geqslant C。$$

因为 $A_0B_0 \geqslant C_0 \in w$，所以 $AB \geqslant C \in w$。⊣

引理 3.11

AKC 的适当框架 F 是 akc-框架。

证明：

我们来验证 F 满足定义 2.3 给出的框架条件。

验证($ctr_{\geqslant}$)。

设 $\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$ 且 $\langle X, Z, U\rangle \in N(w)$。则

(1) 存在 $A_1B_1 \geqslant C_1 \in w$ 使得 $|A_1| = X$，$Y \subseteq |B_1|$ 且

$|C_1| \subseteq Z$，且

(2) 存在 $A_2B_2 \geqslant C_2 \in w$ 使得 $|A_2| = X$，$Z \subseteq |B_2|$ 且 $|C_2| \subseteq U$。

因为 $|A_1| = |A_2|$，所以 $\vdash A_1 \leftrightarrow A_2$，因此据(1)的 $A_1B_1 \geqslant C_1 \in w$ 和 $RAE_{\geqslant}$，有

$$A_2B_1 \geqslant C_1 \in w。$$

因为 $|C_1| \subseteq |B_2|$，所以 $\vdash C_1 \rightarrow B_2$，据 $RCM_{\geqslant}$，有

$$A_2B_1 \geqslant B_2 \in w,$$

再据(2)的 $A_2B_2 \geqslant C_2 \in w$ 和据公理 $CTR_{\geqslant}$，易得

(3) 存在 $A_2B_1 \geqslant C_2 \in w$ 使得 $|A_2| = X$，$Y \subseteq |B_1|$ 且 $|C_2| \subseteq U$。

所以 $\langle X, Y, U\rangle \in N(w)$。

验证($cc_{\geqslant}$)。

设 $\langle X, Y, Z_1\rangle \in N(w)$ 且 $\langle X, Y, Z_2\rangle \in N(w)$。则

(1) 存在 $A_1B_1 \geqslant C_1 \in w$ 使得 $|A_1| = X$，$Y \subseteq |B_1|$ 且 $|C_1| \subseteq Z_1$，且

(2) 存在 $A_2B_2 \geqslant C_2 \in w$ 使得 $|A_2| = X$，$Y \subseteq |B_2|$ 且 $|C_2| \subseteq Z_2$。

因为

$$\vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_1, \quad \vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_2,$$

所以据 $A_1B_1 \geqslant C_1 \in w$，$A_2B_2 \geqslant C_2 \in w$ 和 $RBM_{\geqslant}$，有

(3) $A_1(B_1 \wedge B_2) \geqslant C_1 \in w$，$A_2(B_1 \wedge B_2) \geqslant C_2 \in w$。

因为 $|A_1| = |A_2|$，所以据(3)的后者和 $RAE_{\geqslant}$，有

$$A_1(B_1 \wedge B_2) \geqslant C_2 \in w。$$

再据(3)的前者和公理 $CC_{\geqslant}$，易得

(4) 存在 $A_1(B_1 \wedge B_2) \geqslant C_1 \wedge C_2 \in w$ 使得 $|A_1| = X$，$Y \subseteq |B_1 \wedge B_2|$ 且 $|C_1 \wedge C_2| \subseteq Z_1 \cap Z_2$。

所以 $\langle X, Y, Z_1 \cap Z_2\rangle \in N(w)$。

验证($ca_{\geqslant}$)。

设 $\langle X_1, Y, Z\rangle \in N(w)$ 且 $\langle X_2, Y, Z\rangle \in N(w)$。则

(1) 存在 $A_1B_1 \geqslant C_1 \in w$ 使得 $|A_1| = X_1$，$Y \subseteq |B_1|$ 且 $|C_1| \subseteq Z$，且

(2) 存在 $A_2B_2 \geqslant C_2 \in w$ 使得 $|A_2| = X_2$，$Y \subseteq |B_2|$ 且 $|C_2| \subseteq Z$。

因为

$$\vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_1, \vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_2,$$

所以据 $A_1B_1 \geqslant C_1 \in w$，$A_2B_2 \geqslant C_2 \in w$ 和 $RBM_{\geqslant}$，有

(3) $A_1(B_1 \wedge B_2) \geqslant C_1 \in w$，$A_2(B_1 \wedge B_2) \geqslant C_2 \in w$。

因为

$$\vdash C_1 \rightarrow C_1 \vee C_2, \vdash C_2 \rightarrow C_1 \vee C_2,$$

所以据(3)和 $RCM_{\geqslant}$，有

$A_1(B_1 \wedge B_2) \geqslant C_1 \vee C_2 \in w$，$A_2(B_1 \wedge B_2) \geqslant C_1 \vee C_2 \in w$。

再据公理 $CA_{\geqslant}$，易得

(4) 存在 $(A_1 \vee A_2)(B_1 \wedge B_2) \geqslant C_1 \vee C_2 \in w$ 使得 $|A_1 \vee A_2| = X_1 \cup X_2$，$Y \subseteq |B_1 \wedge B_2|$ 且 $|C_1 \vee C_2| \subseteq Z$。

所以 $\langle X_1 \cup X_2, Y, Z\rangle \in N(w)$。

验证($cb_{\geqslant}$)。

设 $\langle X, Y_1, Z\rangle \in N(w)$ 且 $\langle X, Y_2, Z\rangle \in N(w)$。则

(1) 存在 $A_1B_1 \geqslant C_1 \in w$ 使得 $|A_1| = X$，$Y_1 \subseteq |B_1|$ 且 $|C_1| \subseteq Z$，且

(2) 存在 $A_2B_2 \geqslant C_2 \in w$ 使得 $|A_2| = X$，$Y_2 \subseteq |B_2|$ 且 $|C_2| \subseteq Z$。

因为

$$\vdash C_1 \rightarrow C_1 \vee C_2, \vdash C_2 \rightarrow C_1 \vee C_2,$$

所以据 $A_1B_1 \geqslant C_1 \in w$，$A_2B_2 \geqslant C_2 \in w$ 和 $RCM_{\geqslant}$，有

$$A_1B_1 \geqslant C_1 \vee C_2 \in w, A_2B_2 \geqslant C_1 \vee C_2 \in w。$$

因为 $|A_1| = |A_2|$，所以据 $RAE_{\geqslant}$，我们有

$$A_2B_1 \geqslant C_1 \vee C_2 \in w, A_2B_2 \geqslant C_1 \vee C_2 \in w。$$

再据公理 $CB_{\geqslant}$，易得

(3) 存在 $A_2(B_1 \vee B_2) \geqslant C_1 \vee C_2 \in w$ 使得 $|A_2| = X$，$Y_1 \cup Y_2 \subseteq |B_1 \vee B_2|$ 且 $|C_1 \vee C_2| \subseteq Z$。

所以$\langle X, Y_1 \cup Y_2, Z\rangle \in N(w)$。

验证($cmp_{\geqslant}$)。设$\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$且 $w \in X \cap Y$。据前者，

(1)存在 $AB \geqslant C \in w$ 使得$|A| = X, Y \subseteq |B|$且$|C| \subseteq Z$。

据 $AB \geqslant C \in w$ 和公理 $CMP_{\geqslant}$，有 $A \wedge B \rightarrow C \in w$，再据 3.3，有

(2)$A \wedge B \in w \Rightarrow C \in w$。

所以

(3)$w \in |A \wedge B| \Rightarrow w \in |C|$。

因为$|A| = X, Y \subseteq |B|$，所以

$$X \cap Y \subseteq |A| \cap |B| = |A \wedge B|。$$

据设定，有 $w \in X \cap Y$，所以 $w \in |A \wedge B|$。据(3)，有 $w \in |C|$。因为$|C| \subseteq Z$，所以 $w \in Z$。

验证($id_{\perp\top\geqslant}$)。任给 $w \in W$。据公理 $ID_{\perp\top\geqslant}$，有$\perp\top \geqslant \perp \in w$，再据 3.10 的证明中的(1)，

$$\langle |\perp|, |\top|, |\perp|\rangle \in N(w)。$$

再据引理 3.5，我们有$\langle \varnothing, W, \varnothing\rangle \in N(w)$。

验证($rbm_{\geqslant}$)。

设 $Y \subseteq Y_0$ 且$\langle X, Y_0, Z\rangle \in N(w)$。则

(1)存在 $AB \geqslant C \in w$ 使得$|A| = X, Y_0 \subseteq |B|$且$|C| \subseteq Z$。

因为 $Y \subseteq Y_0$，所以易见

(2)存在 $AB \geqslant C \in w$ 使得$|A| = X, Y \subseteq |B|$且$|C| \subseteq Z$。

所以$\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$。

验证($rcm_{\geqslant}$)。

设 $Z_0 \subseteq Z$ 且$\langle X, Y, Z_0\rangle \in N(w)$。则

(1)存在 $AB \geqslant C \in w$ 使得$|A| = X, Y \subseteq |B|$且$|C| \subseteq Z_0$。

因为 $Z_0 \subseteq Z$，所以易见

(2)存在 $AB \geqslant C \in w$ 使得$|A| = X, Y \subseteq |B|$且$|C| \subseteq Z$。

所以$\langle X, Y, Z\rangle \in N(w)$。$\dashv$

定理 3.12　框架完全性定理

AKC 相对框架类 Frame(**akc**)是完全的。

证明：

只须证：

(%) 若 A 不是 AKC 的内定理，则 A 在某个 akc-框架中不有效。

设 A 不是 AKC 的内定理。令 $M = \langle W, N, [\ ]\rangle$是 AKC 的适当结构，且令 $F = \langle W, N\rangle$是 AKC 的适当框架。据引理 3.10，M 是 AKC 的典范模型。据设定和定理 3.8，有 $M \not\models A$，所以 $F \not\models A$。再据上一引理，F 是 akc-框架，所以有要证结果。$\dashv$

我们在定义 1.3 后面的说明(8)已经指出，AKC 有内定理

$$(\%) AB \geqslant C \rightarrow A(B \wedge \neg B) \geqslant C。$$

但这个公式看起来并不自然，所以我们下一步要做的工作是要建立一个弱于 AKC 的逻辑 WAKC 以避免(%)是内定理。

参考文献：

[1] 李小五，刘壮虎. 句子型的择类语义与主次条件句逻辑[J/OL]. 逻辑与认知，2004(4)：1－17.

[2] 李小五. 条件句逻辑[M]. 北京：人民出版社，2003.

责任编辑　刘荣军

Conditional Logic with Double Conditions for Aim and Background Knowledge AKC

LI Xiao-wu

(*Institute of Logic and Cognition*, *Southwest University*, *Chongqing* 400715, *China*)

Abstract: Firstly, we construct the conditional system AKC with double conditions for aim and background knowledge, give some results of its proof theory. Secondly, we introduce the order neighborhood semantics, give the frame conditions of the character axioms and inference rules of AKC, prove the frame soundness of AKC with respect to the frame conditions. Finally, we prove the frame completeness of AKC with respect to the frame conditions as well.

Key words: conditional system with double conditions for aim and background knowledge; order neighborhood semantics; frame soundness; frame completeness