自然数与ω-规则的哲学探讨

柯华庆

自然数序列概念由来已久，但对它的准确刻画不是一件容易的事情。罗素和王浩都对“自然数是1，2，3…等等或重复加1”中怎么解释“等等”和“重复加1”在数理哲学中的重要性和困难性给予足够重视(Russell，p.9；Wang,p 61)。本文尝试从ω-规则的有效性角度解决该问题。

一、逻辑主义对自然数序列的刻画与ω-规则的有效性

逻辑主义用Peano公设来刻画自然数序列。Peano公设刻画自然数序列概念用了三个基本概念(0，数，后继)和五个公设：(1)0是一个数；(2)任何数的后继是一个数；(3)没有两个数有相同的后继；(4)0不是任何数的后继；(5)任何性质，如果0有此性质，又如果任何数有此性质，它的后继必定也有此性质，那么所有的数都有此性质。

Dedekind认为用数学归纳原理刻画自然数是必不可少的，因为其他四个公理也同样适用于N的每个扩集S，S除了N之外还包含某些任意元t所组成的集合T。为了将t从S中去掉，必须认识到凡属于N的n都是从0开始有穷可到达的。要完备刻画数列N的本性必须定义N为所有具备两个性质的集合S的交(ⅰ)0属于S；(ⅱ)对任何k,如果k属于S，则k′也属于S。(Heijenoort，pp.98-103)

哥德尔不完全性定理最清晰最著名的例子是ω-规则。假设A(0)，A(1)，A(2)成立，并且对每一给定的自然数n，A(n)成立，那么“ nA(n)”是否真?ω-规则断言从前提A(0)，A(1)，A(2)，…推出“ nA(n)”。这好像是每个人都能接受的规则，但是，后者不是前者的经典的逻辑推论，因为它不能从这个无穷公式集的某个有穷子集推出，而经典逻辑的紧致性定理要求：一个无穷命题集的任何推论也是该命题集的任何有穷子集的推论。哥德尔的不完全性定理表明：A(0)，A(1)，A(2)，…在形式系统S中可证，因而是真的，由此“ nA(n)”直观上是真的，但在经典逻辑却是不可证的。所以，ω-规则不能作为经典证明论的规则来接受。

为什么在经典逻辑中ω-规则不是有效规则?逻辑主义的解释是：因为算术的标准模型ω不过是算术的一阶真命题的每一模型的初始片段，ω构成每一模型的首要部分；在标准模型的情况下，ω构成它自己的全部，但其它模型还包含另外的非标准数：所有大于标准自然数的数。一个例证A(n)的命题可以对所有标准数0，1，2，…成立，但不能对这个模型中的每一个数都成立，因此虽然ω-规则的所有前提A(0)，A(1)，A(2)，…在这个模型中成立，但结论“ nA(n)”仍有可能是假的。ω-规则的有效性依赖于穷尽自然数的序列0，1，2，…。要使ω-规则有效需要增加一个前提：“并且这些是所有的数”。但是此解决方案是不恰当的，新增从句“并且这些是所有的数”不能用一阶术语来表达，因为没有一个一阶算术的公式集可以用ω作为它的唯一模型。所以，一阶算术对刻画ω-规则的有效性是不恰当的，ω-规则甚至不能用一阶术语来表达。一阶算术有非标准模型，它仅刻画了自然数集的无穷性，而对自然数集中每一个都能从初始元出发通过有穷步到达没有保障；二阶算术能够删除这些非标准模型和它们所包含的非标准数，因为我们可以在其中表达下列事实：标准模型是所有其他模型的初始片段，而且我们感兴趣的正是这个初始片段ω(Read,第52-59页)。这样，二阶算术通过既将自然数集限定为是无穷集，又使得其中的每一个元素是从有穷可到达的，来解决ω-规则的有效性。

徐利治指出，自然数集中的每一个成员是有穷数，可是自然数集又是无穷集，这种“无穷多的有穷序数”和“所有的有穷序数”的概念都是矛盾的。他对此问题的解决方法是用非标准分析的方法构造了非Cantor型自然数序列模型N，提出了无穷发散公设：具有实无穷性的ω虽是整个自然数序列完成时的产物，但在序列过程中已经包含有一个飞跃段，飞跃段中有着不可数无穷多的潜变无穷大元素。该模型显示潜变无穷大既非有穷又非实无穷。(徐利治，第100-118页)所以，逻辑主义对此问题的解决是不恰当的。

二、自然数序列与自然数的无穷序列

自然数序列是数学归纳法能依赖其进行推理的序列；自然数的无穷序列是自然数的非有穷序列。这两个序列的区分是至关重要的，然而，逻辑主义和直觉主义都未注意到这个问题。

本文认为逻辑主义刻画的自然数序列仅仅是自然数的无穷序列，序列中的每一项是从初始元有穷可到达的，整个序列却是无穷的。逻辑主义对自然数序列的刻画不符合他们的目的。Peano公设并未刻画“重复地”，罗素心里想的与所表达的并不是同一个对象。

罗素认为数学归纳法能应用于证明关于自然数的命题是因为数学归纳原理定义了自然数(Russell,p.31)。为什么很多关于自然数的命题可以用数学归纳法来证明呢?它只不过表明那些序列是与自然数序列同范畴的序列，然而很多数学家和逻辑学家对自然数序列的理解仅仅是自然数的无穷序列。罗素所举的自然数序列有：(1)100，101，102，…；(2)0，2，4，6，…；(3)1，1/2，1/4，1/8，…。自然数序列的标准模型是0，1，2，…n,n+1…，序列中的项是自然数。罗素所举的自然数序列实际上是标准序列的函数：f(0),f(1),f(2),…f(n),f(n+1)…，最关键的是f(n),f(n+1)。尽管我们能理解罗素省略号的意义，但严格说来，不能把它们叫自然数序列，只有写成：(1)100，101，102，…n+100,n+101…；(2)0，2，4，6，…2n-2，2n…；(3)1，1/2，1/4，1/8，…(1/2)n，(1/2)(n+1)…才可以叫自然数序列，这就是“等等”、“重复”及数学归纳法的要害所在。表面看来，这没有多大不同，而实质上是自然数序列与自然数的无穷序列的区别所在。罗素由此说：“给定任一序列x0,x1,x2,x3,…xn…只要它是无尽的，不包含重复，有一个首项，并且没有一项不能从首项通过有穷的步骤达到，那么我们就有一个项的集合适合Peano的公理。”(Russell,pp.12-13)此时他大大扩展了自然数序列的概念，变成了自然数的无穷序列。我们说对自然数序列来讲不在于仅仅设想这么一个序列存在，而在于要实实在在地构造

出这么一个序列，其关键是我们要知道第n项是什么，或要确切地知道当第n项知道时，第n+1项是什么。

三、直觉主义对自然数序列的刻画

直觉主义对自然数序列的刻画要分两个阶段来讨论。Brouwer的直觉主义以1918年为界分为两个阶段(Brouwer，p.511)。Brouwer的直觉和构造是为了说明人类好像先天就有的自然数概念的显明性和可认知性。但是第一阶段的直觉和构造产生的是自然数序列，而第二阶段的直觉和构造产生的是自然数的无穷序列。

Brouwer第一阶段的基本直觉是“贰-壹性”，又称为“后继关系”、“变化中的不变性”，而且构造的首要行为是被看作同一的两个离散的东西(同上，p.97)，ω的得到是清晰地设想“等等”，并且仅仅由“同样的元素”组成，“等等”意味着同一对象和运算的不限制的重复，即使那个对象或运算是以一种相当复杂的方式定义的(同上，p.80)。“完全归纳法就是一种数学构造的行为，它仅仅通过数学的基本直觉所证成”(同上，p.98)。彭加勒认为自然数是我们可以依赖其进行递归推理的数(第465页)。Brouwer的基本直觉是“贰-壹性”，其抽象形式是从n到n′，其构造就是数学归纳法的方式，由此直觉和构造不仅创造了数1和2，而且还创造了一切有穷序数和最小的无穷序数ω。“贰-壹性”直觉产生实无穷，Brouwer的“贰-壹性”直觉、数学归纳法的构造和无限序数ω是三位一体的。Brouwer 明确地接受实无穷：“Cantor派的实无穷是存在的，假如我们把它限制在直觉上可以构造的那种无穷上面，并且我们制止通过那种不可能实现的逻辑组合来扩大它”(Brouwer，p.96)。这一观念已为极少数学者所注意(张家龙)。在前期，直觉主义的基本直觉产生自然数序列，数学归纳法能运用其上是根本特征。自1918年，为了构造连续统，Brouwer 引进了无穷进展序列概念。无穷进展序列是一个无穷延展序列，序列是由一个规律还是由自由选择或掷骰子或其他什么方法决定是无关紧要的，从而直觉主义下的连续统本身与每一个直觉主义意义下的实数同时处于能行的、潜无穷的构造状态中（徐利治，第169-170页）。要构造实数或者构造连续统我们必须接受潜无穷。

Brouwer 前期的基本直觉与后期的选择序列是两种不同的直觉，构造概念和无穷观也不相同，前期“贰－壹性”是“变化中的不变性”，后期变成了“自由选择”；前期的序列是“确定的序列”，后期是“选择的序列”；前期的构造是可完成的，后期的“选择的无穷序列”是“可数未完成的”。Brouwer 后期的直觉、构造概念和无穷观是从他处理连续统的构造性时得到的，并不能代表他对整个数学的观点，而且Posy证明了在Brouwer 的直觉认识论和他必须承诺的无穷对象的本体论之间有某种内部的紧张，即其本体论的假设关于存在什么与认识论上的限制对于我们能构造什么或证明什么存在之间的冲突，因而Brouwer后期的直觉、构造概念和无穷观难以成立(Posy,p.202)。

解决Brouwer 第二阶段思想的矛盾在于从本体论上设想有一个实无穷的存在，这样才会有一个实数，它永远是不确定的但我们无能力构造它。直觉和构造属于认识论问题，而无穷对象的存在问题是本体论的问题。无穷对象是否存在只是一个形而上学问题，不能证明也不能反驳，只是一个承诺问题。但是不管实无穷论者还是潜无穷论者，实质上都有一个实无穷对象存在的本体论承诺。这对于实无穷论者是显然的；潜无穷论者如果没有一个实无穷对象存在的本体论承诺，他就永远是一个严格有穷主义者。Cantor认为，承认了潜无穷就必须承认实无穷，即潜无穷实际上依赖于一个逻辑上优先的实无穷。(转引自邢滔滔，第32页)

Brouwer 在第一阶段和第二阶段对自然数序列的理解并不相同，他前期的自然数序列继承了彭加勒的自然数序列观念：自然数是我们可以依赖其进行递归推理的数，自然数的直觉与数学归纳法的构造是一致的。可构造的就是数学对象，ω就是构造的无穷(Brouwer，p.96)、直觉的无穷。后期的自然数序列被理解成第一，第二，第三…，所以他的自然数序列就变成了“总存在下一个”，实质上是自然数的无穷序列，是一种自由选择的序列。

实无穷论者与潜无穷论者的争论实质上是一个对于未来不确知的存在的两种不同看法。实无穷论者与潜无穷论者在算术和有理数领域不存在冲突，他们的冲突发生在数论和无理数领域。在数论中，确实有那么一些数的序列我们现在不能完全把握，例如素数序列、完全数、孪生素数。其中素数在整数理论中处于类似于化学家的元素或物理学家的基本粒子的地位。素数可以说是数论的基础，迄今为止未解决的数论问题多多少少都与素数有关，这是因为素数问题并未完全解决。

自Euclid就已经证明了素数的个数不是有穷的，但是两千多年来数学家企图找出一个适用于所有或者其中部分无穷素数的通项公式都失败了(陈景润，第628页)，我们根本不知道第n个素数，此时我们设想素数序列为p1，p2，p3，…pn,pn+1…由此而认为是自然数序列是错误的。我们仅仅证明了素数不是有穷的，而根本没有证明素数序列是自然数序列，没有按照Brouwer的数学归纳法的构造方式构造出素数序列，我们还只能写成p1，p2，p3，…，至今还不能写成p1，p2，p3，…pn,pn+1…。而偶数序列，平方数序列，f(n)=(1/2)n 2 ＋n+1这样的序列却是自然数序列。自然数序列并不等于自然数的无穷序列，自然数序列是与0，1，2，3，…n,n+1…一一对应的可数无穷集，而自然数的无穷序列仅仅是非有穷的。一个不是有穷的属种只有在它建立与所有自然数的一一对应后才能说是可数无穷集(Heyting，pp.39-40)，从直觉主义的无穷概念来看，我们只证明了素数不是有穷的，而没有证明它是构造的无穷。

通常认为素数无穷序列与自然数序列的对应是设想的，仅仅从有穷个对应推广到无穷个也对应，这种对应是没有保障的。哥德巴赫猜想能很好地说明问题：如果x是偶数并且大于2,那么存在y和z使得y和z是素数并且x=y+z。这里“偶数”、“大于2”、“素数”都是可判定谓词：我们可以断定任何数或是偶的或是奇的，或是大于2的或是不大于2的，或是素的或是不素的，因为存在一个方法来确定它们(分别通过除以2、减去2和筛法)。但是，“每一大于2的偶数是两个素数之和”却是不可判定的。也就是说，我们有一个谓词A(x)是可判定的(“x是偶的，x大于2，并且存在y和z是素数使得x=y+z”)，因为我们可以系统地通过考察所有小于x的序对y和z来检验它们是否素数。但是，“对每一x，A(x)”却是不可判定的(Read，第273-274页)。

Brouwer并非一般地反对实无穷概念，而是在无穷上区别两种：一种是能构造的；另一种是我们还没有构造的，也没有保证它将来

一定会是构造的，而可能是非构造的。能适用数学归纳法的，也就是所有与自然数序列同范畴的是能构造的。但是几乎所有的人将“总存在下一个”作为自然数概念，这是对后期的直觉主义观念的接受，必然坚持所有的无穷是潜无穷(Dummett，p.55)。前期的直觉主义的自然数概念是“总存在下一个且我们知道下一个是什么，即我们总能根据第n个构造出第n+1个”。已经知道“总存在下一个”但并不能一劳永逸地知道下一个是什么的不能作为直觉上可接受的，因而不能作为一个数学存在，我们只有在找到了它的通项公式后才能说它是一个无穷存在。直觉主义反对一般性地将“总存在下一个”的集合作为实无穷，但接受“总存在下一个且我们知道下一个是什么”的集合作为实无穷，对于“总存在下一个但暂时不知道也没有证据表明我们总知道下一个是什么”的无穷序列，我们要看它将来能否构造出来，若能构造就接受它，若仍不能构造，就还不能接受它。

四、直觉主义对ω-规则的解决

本文认为徐利治的潜变无穷大不是在有穷和实无穷之间，而是独立于实无穷的潜无穷，就是Brouwer前期提出的“可数未完成的”，后期的无穷进展序列。当论域是非有穷对象时，若能按照Brouwer前期的构造性构造出来时就是实无穷，还没有构造的若将来构造出来了也是实无穷，但我们可以设想“不能构造的非有穷序列”的可能性，若存在这样的序列就是潜无穷。

本文对ω-规则的有效性的解决是：确实从前提A(0)，A(1)，A(2)，…并不能推出“对每一n，A(n)”。这一点在哥德巴赫猜想中表现出来，但是若前提是A(0)，A(1)，A(2)，…A(n)，A(n+1)…则一定能推出“对每一n，A(n)”。在A(0)，A(1)，A(2)，…中的0，1，2，…是对自然数的泛理解：第一，第二，第三，…是自然数的无穷序列，是潜无穷，没有构造性、封闭性或穷尽性，只有当它们成为用数学归纳法的方式构造时，即成为0，1，2，…n，n+1…时才是真正的自然数序列：具有构造性、封闭性和穷尽性。原因在于前提和结论的论域都是实无穷，从逻辑的角度看“对每一n，A(n)”，没有比A(0)，A(1)，A(2)…A(n)，A(n+1)…更多的东西，其推理是演绎推理。而从前提A(0)，A(1)，A(2)，…并不能推出“对每一n，A(n)”，因为前提的论域是潜无穷，而结论的论域是实无穷，从逻辑的角度看，A(0)，A(1)，A(2)，…推出“对每一n，A(n)”是归纳推理，因为前者是开放的，后者是封闭的。哥德巴赫猜想还没有证明的可能性在于素数序列至今还只知道是自然数的无穷序列，至今没有构造性，因而可能不是自然数序列。要证明哥德巴赫猜想的前提是构造出素数序列，或者说证明它是自然数序列，这样素数才是“可以依赖其进行推理的数”。否则我们对哥德巴赫猜想永远是在验证，可以证明G(4)、G(6)、G(8)……，但不能证明哥德巴赫猜想这一普遍断言。在对无穷对象的证明上，“唯一的证明是递归证明”，而递归证明的前提是有“可以依赖其进行推理的数”。在数论领域，定义一个数类后，首先要确定它是自然数的有穷序列还是自然数的无穷序列，然后对是自然数的无穷序列要进行构造，只有得到了它是自然数序列后才能去证明关于它的一般性命题，因为数学归纳法原理只能用于自然数序列，而不能一般地用于自然数的无穷序列，这是数论中很多与素数有关的难题没有得到解决的原因。

以此看直觉主义的自然数概念、哥德尔不完全性定理和ω-规则，理解Brouwer、哥德尔和维特根斯坦三者之间的关系就顺理成章了。Brouwer 1928年的演说对哥德尔和维特根斯坦的影响特别大，哥德尔的不完全性定理就是受此启发作出来的。而维特根斯坦则听了演讲后重归哲学，创立了所谓“自由变号有穷主义”。Brouwer认为哥德尔的不完全性定理在他很早看来就是显然的。确实，按照Brouwer前期的观念，从前提A(0)，A(1)，A(2)…并不能推出“对每一n，A(n)”。维特根斯坦认为由“A(0)，A(1)，A(2)，…”真并不能得到直观上“对每一n，A(n)”为真(王浩，第84-126页;Wittgenstein)，与本文观点相合。

参考文献

陈景润，1988年：《素数分布》，载《中国大百科全书·数学卷》，中国大百科全书出版社。
罗素：1982年：《数理哲学导论》，商务印书馆。
彭加勒,H　,1988年：《科学的价值》，李醒民 译，光明日报出版社。
王浩，1987年：《哥德尔》，康宏逵 译，上海译文出版社。
邢滔滔，2000年：《一种集合分层及其哲学意蕴》，载《中山大学学报论丛》第2期。
徐利治，1983年：《数学方法论选讲》，华中工学院出版社。
张家龙，1992年：《评数学基础中的直觉主义学派》，载《哲学研究》第4期。
Benacerraf,P　and Putnam,H　,1983,Philosophy of Mathematics,Englewook Cliffs:Prentice　Hall,Inc.
Brouwer,L　E　J　,1975,Collected Works,Volume I：　Philosophy and Foundations of Mathematics，A.Heyting(ed　)，Amsterdam:North　Holland.
Dedekind,R　,1890,Letter to Keferstein,In Heijenoort(ed　)(1967).
1901,Theory of Numbers,Chicago：The Open Court Publishing Company.
Dummett，M　,1977,Elements of Intuitionism,Oxford:Oxford University Press.
Heijenoort,J.V　(ed　),1967,From Frege to G　del:A Source Book in Mathematical Logic(1879-1931),Cambridge：　Harvard Unversity Press
Heyting，A　,1956,Intuitionism:An Introduction，Amsterdam：North　Holland.
Posy,C.J　,2000,“Epistemology,Ontology and the Contimum”,In Grosholz,E　and Breger,H　(eds　)，The Growth of Mathematical Knowledge,Netherland：Kluwer Academic Publishers.

Read，S　,1988年 ，《对逻辑的思考》，李小五 译，辽宁教育出版社,牛津大学出版社。
Russell,B　,1930,Introduction to Mathematical Philosopphy,London：George Allen and Unwin,Ltd..
Wang　Hao,1974，From Mathematics to Philosophy,London：Routledge & Kegan Paul.
Weyl,H　,1963,Philosophy of Mathematics and Natural Science,New York：Atheneum.
Wittgenstein,1975,Philosophical Remarks,Oxford：Basil Blackwell.

(作者单位：中国政法大学人文学院逻辑研究所)
责任编辑：朱葆伟·国外学术动态分析·（《哲学研究》2003年第5期）