# 一个弗协调真值道义逻辑系统

余俊伟

善良的撒玛利顿人悖论是真值道义逻辑系统所独有的一种道义逻辑悖论，最早由A.N.Prior于1958年提出。其形式表述为$F\alpha\wedge\Box(\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow F\beta$，其含义是如果$\alpha$是禁止的，$\beta$衍推$\alpha$，则$\beta$也是禁止的，即能衍推禁止行为的行为本身也是禁止的。举例来说，抢劫毫无疑问是禁止的，而帮助一名被抢劫者无疑衍推抢劫发生了，根据上述公式，帮助被抢劫者的行为也是禁止的。这当然是荒谬的。其中所包含的悖论通常称为善良的撒玛利顿人悖论。

有两种解决这一悖论的办法：一是不使用归约的方法：也即按朴素道义逻辑的方法构造道义逻辑系统。在这类系统中不会有善良的撒玛利顿人悖论出现，这是一种较被动的方法。另一种方法是在弗协调逻辑的基础上进行扩充得到弗协调模态逻辑，在弗协调模态逻辑的基础上仿照通常的做法添加常项和公理而将道义逻辑归约为弗协调真值模态逻辑。本文尝试采用第二种方法来解决善良的撒玛利顿人悖论。下面具体构造一弗协调真值模态逻辑CnMG′。

## 1　CnMG′的形成规则

CnMG′的语言LPD的符号分成四类：

第一类包括可数无穷多个命题变元符号：$p0$，$p1$，$p2$，…，$pm$，…，　m为自然数。

第二类包括一个命题常元符号：　Q。

第三类包括五个联结词：　　，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\Box$。

第四类包括两个标点符号：　(，　)。它们依次被称为左括号和右括号。

CnMG′的公式定义如下：

CnMG′的一个公式是也仅是由下列形成规则而得的有穷符号序列：

（1）单独的命题符号(包括变元和常元)是公式，

（2）若$\alpha$是公式，则　$\alpha$和$\Box\alpha$是公式，

（3）若$\alpha$，$\beta$是公式，则$(\alpha\wedge\beta)$、$(\alpha\vee\beta)$和$(\alpha\rightarrow\beta)$都是公式。

全体命题符组成的集合记为Atom(LPD)，全体公式组成的集合记为Form(LPD)。

另外，为了阅读方便我们引进如下定义：

$(\alpha\quad\beta)=df(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)$；

$\alpha0=df\quad(\alpha\wedge\quad\alpha)$；

$\alpha k=df\alpha000\cdots0$，共有k个0，k为正整数，因此，$\alpha0=\alpha1$；

$\alpha(n)=df(\cdots(\alpha1\wedge\alpha2)\wedge\alpha3\wedge\cdots\wedge\alpha n)$，n为正整数；

$\sim\alpha=df(\quad\alpha\wedge\alpha(n))$，也记为　$(n)\alpha$，

$\Diamond\alpha=df\sim\Box\sim\alpha$。

并约定：

（1）一个公式最外层的括号可以省略。

（2）　、$\sim$、$\Box$、$\Diamond$的结合力最强，$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$和　的结合力依次递减。

（3）采用左结合约定，即在恢复与同一个联结词的多个出现相关的括号时，最左边的括号结合力最强。

## 2　CnMG′的公理系统

系统CnMG′的公理是具有下列形式之一的公式：

（1）$\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$，

（2）　$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$，

（3）　$\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha\wedge\beta)$，

（4）　$\alpha\wedge\beta\rightarrow\alpha$，

（5）　$\alpha\wedge\beta\rightarrow\beta$，

（6）　$(\alpha\rightarrow\gamma)\rightarrow((\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow(\alpha\vee\beta\rightarrow\gamma))$，

（7）　$\alpha\rightarrow\alpha\vee\beta$，

（8）　$\beta\rightarrow\alpha\vee\beta$，

（9）　$\alpha\vee\quad\alpha$，

（10）　　$\alpha\rightarrow\alpha$，

（11）$\beta(n)\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow\quad\beta)\rightarrow\quad\alpha))$， （12）$\alpha(n)\wedge\beta(n)\to(\alpha\to\beta)(n)\wedge(\alpha\wedge\beta)(n)\wedge(\alpha\vee\beta)(n)\wedge(\Box\alpha)(n)$，

（13）$\Box(\alpha\to\beta)\to(\Box\alpha\to\Box\beta)$，

（14）$\Diamond j\Box k\alpha\to\Box l\Diamond m\alpha$，其中j，k，l，m∈ω，

（15）$\Diamond Q$，

（16）$Q(n)$。

CnMG′的推理规则：

R1（→消去规则）：从α和α→β可推出β，

R2（必然规则）：从α可推出□α。

CnMG′的形式可推演关系可以如下定义。公式α的一个证明是一个非空有穷公式序列

α1，α2，…，αm使得αm是α并且对于各个j(1　j　m)，αj满足下列条件之一：

（1）αj是CnMG′的公理，

（2）有小于j的i和k使得αj可从αi和αk利用→消去规则而得到，

（3）有小于j的i使得αj可从αi利用必然规则而得到。

这时我们称α在CnMG′中是可证的，称α为CnMG′的定理，记为├α。设Γ为一公式集，如果Γ中有一有穷子集{α1，α2，…，αm}使得├α1∧α 2∧…∧α m→α，则称α在系统CnMG′中是由Γ形式可推演的，记为Γ├α。若Γ={α1，α 2，…，α m}，则Γ├α可记为α 1，α2，…，αm├α。Γ∪{α}├β可记为Γ，α├β。

从CnMG′的构成可以看出：CnMG′是系统Cn的扩张（对于Cn的详细介绍请参见张清宇等）；经典逻辑的定理的LPD的代入式是CnMG′的定理。

我们现在来定义道义算子O、P和F。

定义1（1）　Oα=df□(Q→α)；（2）　Pα=df　O　α；（3）　Fα=dfO　α。

强的P，F算子可以将定义中的　改为~。O、P和F的结合力同　。

这样在CnMG′中就有一部分公式在经过上述定义替换后就不含□而只含O、P或F，或者就不含有任何模态算子。这些公式就构成一个道义逻辑系统，称之为CnDG′。

经典逻辑中的许多推演规则在CnMG′都成立，下面的定理1和2给出了在后面的证明中要用到的或是CnMG′特有的一些定理及推演规则。

定理1 CnMG′中有下列定理及形式推演规则：

（1）如果г├α，并且Γ　Δ，那么Δ├α，

（2）如果Γ├α1→α2，Γ├α2→α3，…，Γ├αm-1→αm,那么Γ├α1→αm，

（3）Γ├α∧β当且仅当Γ├α并且Γ├β，

（4）├α→β　 ├□α→□β并且├◇α→◇β，

（5）├~◇~α　□α，├◇α　~□~α，├◇~α　~□α，├~◇α　□~α，

（6）├□α∧□β　□(α∧β)，

（7）├α(n)→(Oα)(n)。

定理2在CnMG′（CnDG′）中我们有下列定理：

（1）├α(n)→(Pα→~O~α)，（2）├α(n)→(　Oα→P　α)，

（3）├Oα→~O~α，　（4）├O~α→~Oα，

（5）├~(Oα∧O~α)，　（6）├Oα∧O(α→β)→Oβ。

下列模式不是CnMG′（CnDG′）的定理：

O　(α∧　α)；O(α∧　α)→Oβ；Oα∧O　α→Oβ；

Fα∧F　α→Oβ；O(　α∧　　α)→Oβ；Fα∧F　α→Fβ；Fα∧□(β→α)→Fβ。

证明：对于公式α，令α*表示对α进行如下变形而得的公式：以β(n)(n)代替Q，再去掉□。设├α。我们使用归纳法，施归纳于α的证明，易得α*是Cn的定理。设γ是上面所列7个公式中的任意一个，易检验γ*不是Cn中的定理。因此γ不是CnMG′中的定理。

由上面的证明我们还可以得到CnMG′（相对于Cn）的一致性。

定义2一公式α是道义不足道的，当且仅当对任一公式β有├α→Oβ。如果一系统含有一道义不足道的公式，我们称该系统被该公式道义不足道化了。

定理3CnMG′（CnDG′）没有被形如Oα∧O　α，Fα∧F　α的公式所道义不足道化。

证明：由上所证明Oα∧O　α→Oβ，Fα∧F　α→Oβ不是├α中的定理即得。

由定理3可知，系统CnMG′（CnDG′）能容忍道义二难，而且由Fα∧□(β→α)→Fβ不是定理知系统CnMG′避免了善良的撒玛利顿人悖论。但是在真值道义模态逻辑中常见的另外几个可疑的公式，如□p→Op和Op→◇p等却仍然是CnMG′中的定理，所以CnMG′虽然避免了善良的撒玛利顿人悖论，但它并未完全证明道义逻辑归约为真值模态逻辑是可行的。

3　CnMG′的语义

一个框架是一个有序三元组〈W，R，Opt〉，W是一非空集；R是W上的二元关系；Opt　W。一个框架是Opt-延续的框架当且仅当该框架满足条件：　w(w∈W→　w′(w′∈Opt∧wRw′))。一个框架是G′框架当且仅当该框架满足下列条件：　w1　w2　w3（w1Rjw2∧w1Rlw3→　w4（w2Rkw4∧w3Rmw4)），其中w1，w2，w3，w4∈W，j，k，l，m∈ω。W上的关系Rk是指：wR0w′当且仅当w= w′，wRk+1w′当且仅当　w″(wRw″∧w″Rkw′)。如果一个框架既是G′框架又是Opt-延续的框架，我们称它是G′Opt-延续的框架。

定义3框架上的一个赋值V就是从卡氏集Form(LPD)×W到集合{0，1}上的一个函数，并满足下列条件：

（1）如果V（α，w）=0，则V（　α，w）=1，

（2）如果V（　　α，w）=1，则V（α，w）=1，

（3）如果V（β(n)，w）= V（α→β，w）=V（α→　β，w）=1，则V（α，w）=0，

（4）V（α→β，w）=1当且仅当V（α，w）=0或V（β，w）=1，

（5）V（α∧β，w）=1当且仅当V（α，w）=V（β，w）=1，

（6）V（α∨β，w）=1当且仅当V（α，w）=1或V（β，w）=1，

（7）如果V（α(n)，w）= V（β(n)，w）=1，则V（(α→β)(n)，w）= V（(α∧β)(n)，w）= V（(α∨β)(n)，w）=V（(□α)(n)，w）=1，

（8）V（□α，w）=1当且仅当，对任意w′∈W有：若wRw′则V（α，w′）=1，

（9）V（Q，w）=1当且仅当w∈Opt，

（10）V（Q(n)，w）=1。

一个模型是由一个框架〈W，R，Opt〉和此框架上的一个赋值V组成的有序四元组〈W，R，Opt，V〉。当〈W，R，Opt〉是G′框架（Opt-延续的框架或G′Opt-延续的框架）时，我们称〈W，R，Opt，V〉为G′模型（Opt-延续模型或G′Opt-延续模型）。设α∈Form(LPD)，称α在模型〈W，R，Opt，V〉中为真，当且仅当对任意w∈W有V（α，w）=1，记为〈W，R，Opt，V〉⊨α；称α在框架〈W，R，Opt〉上有效，当且仅当对〈W，R，Opt〉上的任意一个赋值V都有〈W，R，Opt，V〉⊨α，记为〈W，R，Opt〉⊨α；令C为一框架类（或模型类），称α在模型类C中为真（或在框架类C上有效），当且仅当α在C中的任一元素处为真（或有效），记为C ⊨α。在由全体G′框架所组成的框架类上有效的公式我们称之是G′有效的。在由全体Opt-延续的框架所组成的框架类上有效的公式我们称之是Opt-延续有效的。在由全体G′Opt-延续框架所组成的框架类上有效的公式我们称之是G′Opt-延续有效的。

引理1 CnMG′的公理（1）—（13）及（16）在任一框架上都是有效的。

证明：略。（由于篇幅所限，以下引理及定理一般均略去证明）

引理2 CnMG′的公理（14）◇j□kα→□l◇mα是G′有效的，其中j，k，l，m∈ω。

引理3 CnMG′的公理（15）◇Q是Opt-延续有效的。

引理4令C是任一框架类，我们有：

（1）如果α→β，α在C上有效，那么β在C上有效，

（2）如果α在C上有效，那么□α在C上有效。

定理4（CnMG′的可靠性）　如果 ⊢α，那么α是G′Opt-延续有效的。

证明：由引理1、2、3和4使用归纳法，施归纳于证明的长度即得。

定义4令Γ是一公式集，即Γ　Form(LPD)，

（1）Γ*=df{α∈Form(LPD)：Γ ⊢α}，如果Γ=Γ*，我们称Γ是演绎封闭的，

（2）称Γ是不足道的（或平庸的），当且仅当，Γ*=Form(LPD)；若Γ*≠Form(LPD)称Γ是足道的（或不平庸的），

（3）称一足道集Γ是极大的，当且仅当，对任意公式α，如果α　Γ，那么Γ∪{α}是不足道的，

（4）称Γ是不协调的，当且仅当，有公式α使得Γ ⊢α且Γ ⊢
　瘙綈α。

引理5令Γ　Form(LPD)，α∈Form(LPD)，则有：

（1）Γ ⊢α当且仅当Γ∪{~α}是不足道的，

（2）Γ是足道的，当且仅当，没有一个公式α使得Γ ⊢α且Γ ⊢~α，

（3）如果Γ是足道的，那么Γ∪{α}和Γ∪{~α}中有一个是足道的，

（4）如果Γ是足道的，那么Γ是极大的当且仅当α∈Γ或者~α∈Γ。

引理6如果是Γ极大足道集，α，β∈Form(LPD)，那么，

（1）Γ ⊢α当且仅当α∈Γ，

（2）如果 ⊢α，那么α∈Γ，

（3）如果α∈Γ且α→β∈Γ，那么β∈Γ，

（4）$\alpha\to\beta\in\Gamma$当且仅当$\alpha \quad \Gamma$或者$\beta\in\Gamma$，

（5）$\alpha\wedge\beta\in\Gamma$当且仅当$\alpha\in\Gamma$并且$\beta\in\Gamma$。

引理7(极大扩张引理) 每一个足道集都可扩张成极大足道集。

为行文方便，令$max=\{\Phi：\Phi$为极大足道集$\}$，$max\Gamma=\{\Phi：\Phi\in max\wedge\Gamma \quad \Phi\}$。

引理8令$\Gamma$为任一公式集，我们有：$\Gamma\vdash\alpha$当且仅当 $\quad \Phi\in max\Gamma(\alpha\in\Phi)$，即$\alpha$是$max\Gamma$中的任意极大足道集的元素。

现在定义典范模型Џc=〈Wc，Rc，Optc，Vc〉如下：Wc=max，

Rc是Wc上的二元关系且满足条件：对任意w，w′∈max，wRcw′当且仅当$\{\alpha\in Form(LPD)：\Box\alpha\in w\} \quad w'$，

$Optc=\{w：Q\in w\}$，

如果$\alpha\in w$，则Vc（α，w）=1；否则，Vc（α，w）=0。

引理9w(Rc)kw′当且仅当$\{\alpha\in Form(LPD)：\Box k\alpha\in w\} \quad w'$当且仅当$\{\Diamond k\alpha\in Form(LPD)：\alpha\in w'\} \quad w$。

引理10〈Wc，Rc，Optc〉是G′框架。

引理11〈Wc，Rc，Optc〉是G′Opt-延续框架。

证明：我们只需证明〈Wc，Rc，Optc〉既是G′框架又是Opt-延续的。由引理10得〈Wc，Rc，Optc〉是G′框架。下面证〈Wc，Rc，Optc〉是Opt-延续的。根据Opt-延续框架的定义，我们只需证Rc满足： $\quad w(w\in max\to \quad w'(w'\in Optc\wedge wRw'))$。我们又只需证：

$\{\alpha：\Box\alpha\in w\}\cup\{Q\}$是足道的。

这是因为，如果上式成立，那么据引理7，我们就能将其扩张成一极大足道集，设其为Γ，这样我们有$Q\in\Gamma$而且$\{\alpha：\Box\alpha\in w\} \quad \Gamma$，根据〈Wc，Rc，Optc〉的定义，$\Gamma\in Optc$且wRCΓ，所以Γ即可视为我们要找的w′。我们仍采用反证法，假设上式不成立。设$\Phi=\{\alpha：\Box\alpha\in w\}\cup\{Q\}$。据引理5（2）有一公式α使得：

$\Phi\vdash\alpha$且$\Phi\vdash\sim\alpha$1

$\Phi\vdash\alpha\wedge\sim\alpha$2据1，定理1的（3）

Φ中存在一有穷子集$\{\alpha1，\alpha2，\cdots，\alpha m\}$使得

$\vdash\alpha1\wedge\alpha\ 2\wedge\cdots\wedge\ m\to\alpha\wedge\sim\alpha$3形式可推演定义

$\vdash\alpha\wedge\sim\alpha\to\sim Q$4经典逻辑定理LPD的代入

$\vdash\alpha1\wedge\alpha2\wedge\cdots\wedge\alpha m\to\sim Q$5据3、4，定理1的（2）

$\vdash\Box(\alpha1\wedge\alpha2\wedge\cdots\wedge\alpha m)\to\Box\sim Q$6据5，定理1的（4）

$\vdash\Box\alpha1\wedge\Box\alpha2\wedge\cdots\wedge\Box\alpha m$

$\to\Box(\alpha1\wedge\alpha2\wedge\cdots\wedge\alpha m)$7定理1的（6）

$\vdash\Box\alpha1\wedge\Box\alpha2\wedge\cdots\wedge\Box\alpha m\to\Box\sim Q$8据6、7，定理1的（2）

$\Box\alpha1，\Box\alpha2，\cdots，\Box\alpha m\in w$ 9前提

$\Box\alpha1\wedge\Box\alpha2\wedge\cdots\wedge\Box\alpha m\in w$10据9，引理6的（5）

$\Box\sim Q\in w$11据8、10，引理6的（4）

$\vdash\Box\sim Q\to\sim\Diamond Q$12定理1的（5）

$\Box\sim Q\to\sim\Diamond Q\in w$13据12,引理6的（2）

$\sim\Diamond Q\in w$14据11、13，引理6的（4）

但是$\vdash\Diamond Q$，据引理6的（2），我们又有$\Diamond Q\in w$，这就将使得w是不足道的。因此假设不成立，故〈Wc，Rc，Optc〉是Opt-延续的。

综上所证可得〈Wc，Rc，Optc〉是G′Opt-延续框架。

引理12Џc=〈Wc，Rc，Optc，Vc〉是一个G′Opt-延续模型。

证明：由引理11易得。

定理5（CnMG′的完全性）如果α是G′Opt-延续有效的，那么$\vdash\alpha$。

证明：如果α不是CnMG′的定理，那么据引理8，有一极大足道集w，α瘙綹w，因为$w\in Wc$，所以Vc（a，w）=0，而由引理11知〈Wc，Rc，Optc〉是G′Opt-延续框架，所以α不是G′Opt-延续有效的。

参考文献

余俊伟，1997年：《道义逻辑中的“悖论”及道义系统的归约问题》，载《自然辩证法研究》增刊。

2000年：《论道义逻辑系统的归约及其相关问题》，载《西南师范大学学报》第2期。

张清宇等，1997年：《哲学逻辑研究》，社会科学文献出版社。
Aqvist，Lennart，1984，“Deontic Logic”, in Handbook of Philosophical Logic,Vol.II, Gabbay and F.Guenthner(eds),D.Reidel Pub. Co.

da Costa and Carnielli，Walter A.，1986，On Paraconsistent Deontic Logic Philosophia
Hilpinen，Risto(ed.)，1970，New Studies In Deontic Logic，Published by D　Reidel Publishing Company.(作者单位：中国人民大学哲学系)
责任编辑：朱葆伟(《哲学研究》2003年第1期)